Cuprins

Adriana-Ioana Lefter

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Anul I, Facultatea de Fizică
Note de curs

CAPITOLUL 1

Structura algebrică şi topologică a mulţimii numerelor reale

Pentru a introduce definiţia unui sistem de numere reale avem nevoie de câteva informaţii preliminare.

1.1. Relaţii de ordine. Majoranţi, minoranţi

DEFINIŢIA 1.1.1. *Fie* $X \neq \emptyset$ *o mulţime. O submulţime* $\mathcal{R} \subset X \times X$ *se numeşte relaţie pe* X.

DEFINIŢIA 1.1.2. *Fie* $X \neq \emptyset$ *o mulţime. O relaţie* $\mathcal{R}$ *pe* X *se numeşte relaţie de ordine (parţială) pe* X *dacă:*
1) $(x,x) \in \mathcal{R},\ \forall x \in X$ *(*$\mathcal{R}$ *este reflexivă)*
2) $(x,y) \in \mathcal{R}$ *şi* $(y,x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$ *(*$\mathcal{R}$ *este antisimetrică)*
3) $(x,y) \in \mathcal{R}$ *şi* $(y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$ *(*$\mathcal{R}$ *este tranzitivă).*

O mulţime $X \neq \emptyset$ *înzestrată cu o relaţie de ordine (parţială) se numeşte (parţial) ordonată.*

Vom nota în continuare o relaţie de ordine prin " $\leq$ ". $(x,y) \in \mathcal{R}$ se va renota $x \leq y$ şi se va citi "x precede y", "x este mai mic sau egal cu y", "x succede y" sau "y este mai mare sau egal cu x". Cu această notaţie, definiţia 1.1.2 se rescrie: " $\leq$ " este relaţie de ordine (parţială) pe X dacă
1) $\forall x \in X,\ x \leq x;$
2) $\forall x, y \in X,\ (x \leq y,\ y \leq x) \Rightarrow x = y;$
3) $\forall x, y, z \in X,\ (x \leq y,\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z.$

EXEMPLUL 1.1.1. *Dacă* $\mathcal{P}(M)$ *este familia tuturor părţilor unei mulţimi* $M \neq \emptyset$ *(adică* $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}$*), atunci relaţia de incluziune este o relaţie de ordine (parţială) pe* $X = \mathcal{P}(M)$.

DEFINIŢIA 1.1.3. *Două elemente* x, y *ale unei mulţimi ordonate* $(X, \leq)$ *se numesc comparabile dacă* $x \leq y$ *sau* $y \leq x$.

Spunem că o mulţime ordonată $(X, \leq)$ *este total ordonată (lanţ) dacă oricare două elemente ale sale sunt comparabile.*

EXEMPLUL 1.1.2. *Dacă mulţimea* M *are cel puţin două elemente, atunci* $(\mathcal{P}(M), \subset)$ *nu este lanţ, întrucât luând elementele* $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$, *avem* $\{m_1\}, \{m_2\} \in \mathcal{P}(M)$, *dar*

$$\{m_1\} \nsubseteq \{m_2\}, \quad \{m_2\} \nsubseteq \{m_1\}.$$

EXEMPLUL 1.1.3. $\mathbb{N}$ *împreună cu relaţia uzuală de ordine* " $\leq$ " *este lanţ.*

DEFINIŢIA 1.1.4. *Fie* $(X, \leq)$ *o mulţime (parţial) ordonată şi* $\emptyset \neq A \subset X$.

a) *Un element* $\beta \in X$ *se numeşte majorant pentru mulţimea* A *dacă* $x \leq \beta, \ \forall x \in A$.

b) *Un element* $\alpha \in X$ *se numeşte minorant pentru mulţimea* A *dacă* $\alpha \leq x, \ \forall x \in A$.

OBSERVAŢIA 1.1.1.

1) *O mulţime poate avea mai mulţi majoranţi sau minoranţi.*

2) *Un majorant (minorant) al mulţimii* A *poate să aparţină sau nu mulţimii* A.

EXEMPLUL 1.1.4. *Fie* $X = \mathbb{N}$ *şi* " $\leq$ " *relaţia uzuală de ordine pe* $\mathbb{N}$. *Fie* $A = \{3, 4, 5\}$. *Observăm că 1 şi 3 sunt minoranţi pentru* A, *dar* $1 \notin A$, *iar* $3 \in A$. *De asemenea, 5 şi 8 sunt majoranţi pentru* A, *dar* $5 \in A$, *iar* $8 \notin A$.

DEFINIŢIA 1.1.5. *Dacă un majorant* $\beta_0 \in X$ *al mulţimii* A *aparţine mulţimii* A, *vom spune că* β_0 *este cel mai mare element al mulţimii* A.

Dacă un minorant $\alpha_0 \in X$ *al mulţimii* A *aparţine mulţimii* A, *vom spune că* α_0 *este cel mai mic element al mulţimii* A.

Fiecare dintre acestea, dacă există, este unic. Notăm $\beta_0 = \max A$, respectiv $\alpha_0 = \min A$.

Într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că atât β_0, cât şi β_1 (cu $\beta_1 \neq \beta_0$) joacă rol de cel mai mare element al lui A, atunci $\beta_0, \beta_1 \in A$ şi:

- întrucât β_0 este majorant pentru A şi $\beta_1 \in A$, rezultă că $\beta_1 \leq \beta_0$;
- întrucât β_1 este majorant pentru A şi $\beta_0 \in A$, rezultă că $\beta_0 \leq \beta_1$;

prin urmare, din antisimetria relaţiei de ordine, $\beta_0 = \beta_1$, *contradicţie*. Deci cel mai mare element al lui A, dacă există, este unic. Analog se demonstrează unicitatea pentru cel mai mic element al lui A.

EXEMPLUL 1.1.5. *În exemplul precedent,* $\min A = 3$, $\max A = 5$.

DEFINIŢIA 1.1.6.

a) *Spunem că o mulţime* $A \subset (X, \leq)$ *este majorată dacă* A *admite majoranţi.*

b) *Spunem că o mulţime* $A \subset (X, \leq)$ *este minorată dacă* A *admite minoranţi.*

c) *Spunem că mulţimea* A *este mărginită dacă este atât majorată, cât şi minorată. Cu alte cuvinte,*

$$A \subset X \text{ este mărginită } \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in X \text{ astfel încât } \alpha \leq x \leq \beta, \ \forall x \in A.$$

DEFINIŢIA 1.1.7.

a) *Dacă* $A \subset (X, \leq)$ *este o mulţime majorată şi dacă există cel mai mic majorant* M *pentru* A *(adică cel mai mic element al mulţimii majoranţilor lui* A*, conform definiţiei 1.1.5), atunci* M *se numeşte margine superioară sau supremum al mulţimii* A.

b) *Dacă* $A \subset (X, \leq)$ *este o mulţime minorată şi dacă există cel mai mare minorant* m *pentru* A *(adică cel mai mare element al mulţimii minoranţilor lui* A*, conform definiţiei 1.1.5), atunci* m *se numeşte margine inferioară sau infimum al mulţimii* A.

Fiecare dintre acestea, dacă există, este unic. Notăm $M = \sup A$ şi $m = \inf A$.

Observaţia 1.1.2. *O mulţime are un cel mai mare element dacă şi numai dacă are supremum şi acesta aparţine mulţimii. O mulţime are un cel mai mic element dacă şi numai dacă are infimum şi acesta aparţine mulţimii.*

Prin urmare, în practică:

◇ *dacă am găsit un majorant β pentru A şi $\beta \in A$, atunci*

$$\beta = \sup A = \max A;$$

◇ *dacă am găsit un minorant α pentru A şi $\alpha \in A$, atunci*

$$\alpha = \inf A = \min A.$$

1.2. Structura algebrică şi topologică a mulţimii numerelor reale

Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este un corp comutativ total ordonat, complet, unic determinat până la un izomorfism de corpuri total ordonate. Mai pe larg:

Definiţia 1.2.1. *Numim* sistem de numere reale *o mulţime* $\mathbb{R} \neq \emptyset$ *înzestrată cu două operaţii algebrice (operaţii interne, legi de compoziţie interne):*

$$\begin{array}{lll} + & : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \textit{(numită adunare)} \\ & (x, y) \to x + y,\ \forall x, y \in \mathbb{R} & \\ & & \\ \cdot & : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \textit{(numită înmulţire)} \\ & (x, y) \to x \cdot y \overset{not}{=} xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R} & \end{array}$$

şi cu o relaţie "$\leq$" $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *care satisface următoarele 3 grupe de axiome:*

I. $\mathbb{R}$ *este un corp comutativ, adică:*

(I.1) $(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *(asociativitatea adunării);*

(I.2) $x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *(comutativitatea adunării);*

(I.3) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $0 + x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ *(*0 *este element neutru pentru adunare);*

(I.4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}$ *(numit opusul lui x) astfel încât* $x + (-x) = 0$*;*

(I.5) $(xy)z = x(yz),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *(asociativitatea înmulţirii);*

(I.6) $xy = yx,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *(comutativitatea înmulţirii);*

(I.7) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *astfel încât* $1 \cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ *(*1 *este element neutru pentru înmulţire);*

(I.8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *(notat şi* $\dfrac{1}{x}$ *şi numit inversul lui x) astfel încât* $xx^{-1} = 1$*;*

(I.9) $x(y+z) = xy+xz,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *(distributivitatea la stânga a înmulţirii*

faţă de adunare)

II. $\mathbb{R}$ *este un corp total ordonat, adică* $(\mathbb{R}, \leq)$ *este o mulţime total ordonată (un lanţ), care verifică, în plus, condiţiile:*
(II.1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$*, cu* $x \leq y$*,* $\forall z \in \mathbb{R}$*, are loc* $x + z \leq y + z$*;*
(II.2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$*, cu* $x \leq y, 0 \leq z$*, are loc* $xz \leq yz$*.*

III. ***Axioma de completitudine*** *(*CANTOR-DEDEKIND*) Orice submulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *care este majorată admite cel puţin o margine superioară. Cu alte cuvinte, există* $\sup A$ *şi* $\sup A \in \mathbb{R}$*.*

OBSERVAŢIA 1.2.1. *Pentru orice două numere* $x, y \in \mathbb{R}$*, vom defini diferenţa lor* $x - y = x + (-y)$ *(operaţia se numeşte scădere). Dacă, în plus,* $y \neq 0$*, putem defini şi raportul* $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ *(operaţia se numeşte împărţire).*

OBSERVAŢIA 1.2.2. *Mulţimea* $\mathbb{Q}$ *satisface grupele de axiome I. şi II., dar* ***nu*** *axioma de completitudine III. ! Într-adevăr, se observă că mulţimea* $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x^2 < 2\}$ *este majorată în* $\mathbb{Q}$*, dar* $\sup A \notin \mathbb{Q}$*.*

OBSERVAŢIA 1.2.3.

- *Relaţiei de ordine "*$\leq$*" i se poate ataşa relaţia "*$<$*"*$\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *(pe care o vom numi de ordine* strictă*) prin:*

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ şi } x \neq y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- *În loc să scriem* $x \leq y$ *putem scrie* $y \geq x$*. În loc să scriem* $x < y$ *putem scrie* $y > x$*.*

Numerele reale x pentru care $0 \leq x$ se numesc numere pozitive şi notăm mulţimea lor cu $\mathbb{R}_+$. Numerele reale x pentru care $0 < x$ se numesc numere strict pozitive si notăm mulţimea lor cu $\mathbb{R}_+^*$. Numerele reale x pentru care $x \leq 0$ se numesc numere negative şi notăm mulţimea lor cu $\mathbb{R}_-$. Numerele reale x pentru care $x < 0$ se numesc numere strict negative si notăm mulţimea lor cu $\mathbb{R}_-^*$. Astfel,
$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-^*$
$R_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$
$\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$.

DEFINIŢIA 1.2.2. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*. Numim:*

- *interval deschis de origine* a *şi de extremitate* b *mulţimea*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\};$$

- *interval închis de origine* a *şi de extremitate* b *mulţimea*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$$

- *interval semi-deschis de origine* a *şi de extremitate* b*, deschis în* a *şi închis în* b*, mulţimea*

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\};$$

- *interval semi-deschis de origine a şi de extremitate b, închis în a şi deschis în b, mulţimea*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Intervalele definite mai sus se numesc intervale mărginite*.*
Prin definiţie, $(a, a) = [a, a) = (a, a] = \emptyset$*,* $[a, a] = \{a\}$*.*
De asemenea, pe dreapta reală vom defini şi următoarele tipuri de intervale nemărginite*:*
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},\ \ (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},\ \ [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x <\},$
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$

DEFINIŢIA 1.2.3. *O mulţime* $I \subset \mathbb{R}$ *se numeşte interval dacă pentru orice două elemente* $a, b \in I$*,* $a \leq c \leq b$*, rezultă că* $c \in I$*.*

1.2.1. Proprietăţi ale mulţimii numerelor reale.

Cu ajutorul grupelor de axiome I, II putem demonstra cu uşurinţă:

TEOREMA 1.2.1. *(1) Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $x \leq y$*, atunci* $-y \leq -x$*.*
(2) Dacă $x \leq y$ *şi* $z \leq 0$*, atunci* $xz \geq yz$*.*
(3) Dacă $0 \leq x$ *şi* $0 \leq y$*, atunci* $0 \leq xy$*.*
(4) $0 \leq x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$*;* $0 < x^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *(*$x^2 \stackrel{def.}{=} x \cdot x$*).*
(5) $0 < 1$*.*
(6) Dacă $0 < x$*, atunci* $0 < \dfrac{1}{x}$*.*
(7) Dacă $0 < x < y$*, atunci* $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$*.*
(8) Orice interval deschis $(a, b) \subset \mathbb{R}$*, cu* $a < b$*, este nevid.*

DEMONSTRAŢIE.

(1) Afirmaţia rezultă din $x \leq y$ şi (II.1), (I.5), (I.2), (I.1).

(2) $z \leq 0 \stackrel{1)}{\Longrightarrow} 0 \leq -z \stackrel{(II.2)}{\Longrightarrow} x(-z) \leq y(-z) \stackrel{1)}{\Longrightarrow} yz \leq xz.$

(3) $\left.\begin{array}{c} 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\} \stackrel{(II.2)}{\Longrightarrow} 0 = 0 \cdot y \leq xy.$

(4) Fie $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 0 \stackrel{1)}{\Longrightarrow} 0 \leq -x \stackrel{3)}{\Longrightarrow} 0 \leq (-x)^2 = x^2 \\ \text{sau} \\ 0 \leq x \stackrel{3)}{\Longrightarrow} 0 \leq x^2 \end{array}\right.$

Dacă $x \neq 0$, atunci $x \cdot x \neq 0$ (pentru că un corp n-are divizori ai lui 0). Împreună cu $0 \leq x^2$, rezultă, din definiţia relaţiei "¡", că $0 < x^2$.

(5) $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0 \stackrel{4b)}{\Longrightarrow} 0 < 1^2 \stackrel{(I.7)}{=} 1.$

(6) Presupunem prin reducere la absurd că există un $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x \\ \text{şi} \\ \frac{1}{x} \le 0 \overset{2)}{\Longrightarrow} 0 \le \frac{1}{-x} \end{array}\right\} \overset{3)}{\Longrightarrow} 0 \le x\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \overset{1)}{\Longrightarrow} 1 \le 0.$$

Acest rezultat contrazice (5). Prin urmare, $0 < \frac{1}{x}$.

(7) $0 < x < y \overset{6)}{\Longrightarrow} 0 < \frac{1}{x}$ şi $0 < \frac{1}{y} \Longrightarrow 0 \le \frac{1}{x}\frac{1}{y}$. Aplicând în inegalitatea $0 < x < y$ proprietatea (II.2) cu $z = \frac{1}{x}\frac{1}{y}$, rezultă că $y^{-1} \le x^{-1}$; nu poate avea loc $y^{-1} = x^{-1}$, pentru că aceasta implică $x = y$, ceea ce ar contrazice ipoteza $x < y$. Prin urmare, $y^{-1} < x^{-1}$.

(8) $a < b \Longrightarrow b - a > 0 \overset{(II.2)}{\Longrightarrow} \frac{b-a}{2} > 0 \Longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$, pentru că $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} > 0$ şi $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$.

■

Teorema 1.2.2. *(de caracterizare a supremumului) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un element $M \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă:*

i) $x \le M,\ \forall x \in A$ şi

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Demonstraţie. Fie M =sup A, adică, echivalent, M este cel mai mic dintre majoranţii mulţimii A. Observăm că relaţia i) exprimă faptul că M este majorant pentru A, iar ii) exprimă faptul că M este cel mai mic majorant pentru A, deoarece orice număr real mai mic decât M se poate scrie sub forma $M - \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ şi, cum $M - \varepsilon$ nu este un majorant pentru A, înseamnă că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$. ■

Analog se poate arăta:

Teorema 1.2.3. *(de caracterizare a infimumului) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un element $m \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A dacă şi numai dacă:*

i) $m \le x,\ \forall x \in A$ şi

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Observaţia 1.2.4. *Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$, atunci:*

$$\sup\,[a,b] = \sup\,(a,b] = \sup\,[a,b) = \sup\,(a,b) = b;\ \max\,[a,b] = \max\,(a,b] = b;$$

$$\inf\,[a,b] = \inf\,(a,b] = \inf\,[a,b) = \inf\,(a,b) = a;\ \min\,[a,b] = \min\,[a,b) = a.$$

Propoziţia 1.2.1. *Dacă $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, iar mulţimea B este majorată, atunci şi mulţimea A este majorată, iar* sup $A \le$ sup B.

Demonstraţie. Din $A \subset B \Rightarrow \forall x \in A$, are loc $x \in B$ şi atunci $x \le$ toţi majoranţii lui B; prin urmare, majoranţii lui B sunt majoranţi şi pentru A, deci A este majorată.

Fie acum M_A =sup A, M_B =sup B şi presupunem prin reducere la absurd că $M_A > M_B$. Fie $\varepsilon = M_A - M_B > 0$; din teorema de caracterizare 1.2.2 pentru sup A rezultă că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon > M_A - \varepsilon =$

$M_A - (M_A - M_B) = M_B$. Pe de altă parte, întrucât $x_\varepsilon \in A$ şi $A \subset B$, rezultă că $x_\varepsilon \in B$. Dar relaţiile $x_\varepsilon > M_B$ şi $x_\varepsilon \in B$ contrazic $M_B =$sup B (mai precis, contrazic faptul că M_B este majorant pentru B).

Deci presupunerea făcută este falsă şi atunci $M_A \leq M_B$. ■

Observaţia 1.2.5. *Inegalitatea dintre marginile superioare nu este strictă, chiar dacă $A \subsetneq B$. De exemplu, pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b) \subsetneq [a, b]$ şi totuşi* sup $[a, b) =$ sup $[a, b] = b$.

Propoziţia 1.2.2. *Dacă $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ este majorată, atunci mulţimea $B = -A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\} = \{-x \mid x \in A\}$ este minorată şi inf $(-A) =$sup A.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimea A este majorată, din axioma Cantor-Dedekind rezultă că există $M =$sup $A \in \mathbb{R}$. Din teorema 1.2.2 de caracterizare a marginii superioare rezultă că:

$$\begin{cases} x \leq M,\ \forall x \in A \Longrightarrow -x \geq -M,\ \forall x \in A \text{ (echivalent, } \forall -x \in -A = B) \\ \text{şi} \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A \text{ cu } M - \varepsilon < x_\varepsilon \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists -x_\varepsilon \in -A \text{ cu } -M + \varepsilon > -x_\varepsilon \end{cases}$$

Aceste relaţii implică faptul că $-A$ este minorată şi, din teorema 1.2.3 de caractrizare a marginii inferioare, inf $(-A) = -M$. ■

Teorema 1.2.4. *Orice submulţime nevidă, minorată a lui $\mathbb{R}$ admite margine inferioară în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Fie $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$ o mulţime minorată. Atunci mulţimea

$$-B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in B\}$$

este majorată şi, prin urmare există sup $(-B) \in \mathbb{R}$, conform axiomei de completitudine Cantor-Dedekind.

Dar, din propoziţia anterioară, sup $(-B) = -$inf $B \in \mathbb{R}$. Aşadar există inf $B \in \mathbb{R}$. ■

Din propozittiile 1.2.2 şi 1.2.1 rezultă şi:

Propoziţia 1.2.3. *Dacă $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, iar mulţimea B este minorată, atunci şi mulţimea A este minorată, iar* inf $A \geq$ inf B.

Teorema 1.2.5. *(proprietatea lui* Arhimede*) Dacă $x, y > 0$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $nx > y$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că

$$nx \leq y,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că y este majorant pentru mulţimea $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi atunci, conform axiomei Cantor-Dedekind, există $M =$ sup $A \in \mathbb{R}$. Din teorema de caracterizare a marginii superioare pentru $\varepsilon = x > 0$ obţinem că există $y_x \in A$ astfel încât $M - x < y_x \leq x$; mai precis, folosind definiţia lui A, rezultă că există $n_x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M - x < y_x = n_x x \leq x$. Prin urmare,

$M < (n_x + 1)x$. Aşadar, am găsit $y' = (n_x + 1)x \in A$ astfel încât $y' > M$, ceea ce *contrazice* $M = \sup A$.

În concluzie, presupunerea făcută este falsă şi proprietatea lui ARHIMEDE este demonstrată. ■

OBSERVAŢIA 1.2.6. *Fie* $a > 0$.

1) Luând $x = a$ *şi* $y = 1$ *în teorema precedentă, rezultă că există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\frac{1}{n} < a$.

2) Luând $x = 1$ *şi* $y = a$ *în teorema precedentă, rezultă că*

$$\text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } a < n. \tag{1.1}$$

OBSERVAŢIA 1.2.7. *Există corpuri ordonate (adică mulţimi pentru care funcţionează grupele de axiome I, II) în care n-are loc proprietatea lui* ARHIMEDE. *Observăm că în demonstraţia proprietăţii lui* ARHIMEDE *a intrat esenţial axioma lui* CANTOR-DEDEKIND.

COROLAR 1.2.1. *Dacă* $a \geq 0$ *şi*

$$a < \varepsilon, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q} \text{ cu } \varepsilon > 0, \tag{1.2}$$

atunci $a = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem prin reducere la absurd că $a > 0$. Din proprietatea lui ARHIMEDE rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $na > 1$.

Pe de altă parte, luând $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ în (1.2), obţinem că $a < \frac{1}{2n}$ sau, echivalent, $na < \frac{1}{2} < 1$, *contradicţie*.

Deci presupunerea făcută este falsă şi, prin urmare, $a = 0$. ■

TEOREMA 1.2.6. *Pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *există* $n \in \mathbb{Z}$, *unic determinat, astfel încât*

$$n \leq x < n + 1. \tag{1.3}$$

Acest întreg se notează $[x]$ şi se numeşte *partea întreagă* a numărului real x.

DEMONSTRAŢIE. **Existenţa.** Dacă $x \geq 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \exists m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x < m$. Fie m_0 cel mai mic element din $\mathbb{N}^*$ cu această proprietate. Atunci $n = m_0 - 1$ satisface (1.3).

Dacă $x < 0 \Rightarrow -x > 0$. Fie m_0 cel mai mic număr natural pentru care $-x < m_0$ ($\Leftrightarrow x > -m_0$). Atunci

$$n = \begin{cases} -m_0 + 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -m_0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

satisface (1.3).

Unicitatea lui n ce satisface (1.3): presupunem prin reducere la absurd că există $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, cu $n_1 \neq n_2$ (să zicem, $n_1 < n_2$) ce verifică (1.3). Atunci $n_1 < n_2 \leq x < n_1 + 1$, de unde rezultă că $0 < n_2 - n_1 < 1$, *contradicţie* ($n_2 - n_1 \in \mathbb{N}^*$!).

Deci presupunerea făcută este falsă, ceea ce încheie demonstraţia unicităţii. ■

Teorema 1.2.7. *(densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$, există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x < q < y$.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$. Din proprietatea lui Arhimede pentru valorile $y - x$ şi 1 rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n(y - x) > 1$ sau, echivalent,

$$\frac{1}{n} < y - x. \tag{1.4}$$

Fie $m = [nx] + 1 \in \mathbb{Z}$. Din teorema 1.2.6 $\Rightarrow m - 1 \leq nx < m \Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$. Prima inegalitate se rescrie $\frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n}$. Obţinem şirul de inegalităţi $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} \overset{(1.4)}{<} y$. Aşadar, numărul $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ satisface inegalitatea $x < q < y$. ■

Teorema 1.2.8. *(densitatea lui $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$, există $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x < z < y$.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$ şi fie $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci $x - r < y - r$ şi, din teorema 1.2.7, există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x - r < q < y - r$ sau, echivalent, $x < q + r < y$. Facem observaţia că $z = q + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (pentru că, presupunând prin reducere la absurd că $z \in \mathbb{Q}$, ar rezulta $r = z - q \in \mathbb{Q}$, *contradicţie*!) . Cu aceasta, teorema este demonstrată. ■

Observaţia 1.2.8. *Se poate arăta că între oricare două numere reale distincte există, de fapt, o infinitate de numere raţionale şi o infinitate de numere iraţionale (a se vedea* **[3]***).*

Definiţia 1.2.4. *Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ definim modulul (valoarea absolută) a lui x, notat $|x|$, prin*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Utilizând definiţia modulului unui număr real se arată uşor că:
(N_1) $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R};\quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N_2) $|xy| = |x||y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
(N_3) $|x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Definiţia 1.2.5. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, numim distanţă între x şi y numărul $d(x, y) = |x - y|$.*

Funcţia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ posedă următoarele proprietăţi fundamentale:
(M_1) $d(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R};\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M_2) $d(x, y) = d(y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
(M_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Proprietăţile (M_1) şi (M_2) sunt imediate, din (N_1) şi $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar pentru a demonstra (M_3) aplicăm (N_3) :

$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \overset{(N_3)}{\leq} |x-y|+|y-z| = d(x,y)+d(y,z),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

OBSERVAŢIA 1.2.9. *O inegalitate analogă lui (M_3) are loc în plan şi poate fi interpretată astfel: în orice triunghi lungimea unei laturi este mai mică, cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi. Din acest motiv, proprietăţile (M_3) şi (N_3) (din care provine (M_3)), poartă numele de "inegalitatea triunghiulară".*

1.2.2. Dreapta reală.

Considerăm o axă (= o dreaptă) pe care sunt fixate:

- un punct $\mathcal{O}$, numit origine;
- o unitate de măsură;
- un sens.

Fie $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathcal{O}A}$ vectorul unitate.

Notăm cu Δ mulţimea punctelor acestei axe; Δ se poate organiza ca un grup în raport cu operaţia de adunare dată prin: dacă $M, N \in \Delta$, atunci $P = M + N \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \overrightarrow{\mathcal{O}M} + \overrightarrow{\mathcal{O}N}$. Pe Δ se introduce relaţia de ordine "$M \leq N \Longleftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{u}$ au acelaşi sens". Admitem că Δ este un grup ordonat în care funcţionează proprietatea lui ARHIMEDE şi în care orice submulţime nevidă majorată are margine superioară.

Se arată că există o unică aplicaţie $\psi : \mathbb{R} \to \Delta$, care asociază fiecărui număr $x \in \mathbb{R}$ acel punct unic $M \in \Delta$ astfel încât $\overrightarrow{\mathcal{O}M} = x\overrightarrow{u}$ (deci $\psi(x) = M$); în particular, $\psi(0) = \mathcal{O}$, $\psi(1) = A$.

Aplicaţia ψ este o bijecţie, numită bijecţia lui DESCARTES. Prin bijecţia lui DESCARTES mulţimea $\mathbb{R}$ poate fi identificată cu mulţimea punctelor unei axe, ceea ce motivează denumirea de "dreaptă reală" ce se mai foloseşte pentru mulţimea $\mathbb{R}$ şi de "puncte" pentru numerele reale.

1.2.3. Structura topologică a lui $\mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 1.2.6. *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Un interval de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$, se numeşte interval deschis centrat în x_0.*

DEFINIŢIA 1.2.7. *O mulţime $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă conţine un interval deschis centrat în x_0, adică dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$.*

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, notăm mulţimea vecinătăţilor sale cu $\mathcal{V}(x_0)$.

EXEMPLE. $(0,2)$ este vecinătate pentru punctul 1, fiindcă găsim intervalul $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \subset (0,2)$.

Un interval deschis (a,b) sau (a,∞) sau $(-\infty,a)$ este vecinătate pentru orice punct al său. Intervalul închis $[a,b]$ este vecinătate pentru orice punct $x_0 \in (a,b)$, dar nu este vecinătate pentru a şi b.

$\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$ nu sunt vecinătăţi pentru niciunul din punctele lor, deoarece $\forall n \in \mathbb{N}$ (respectiv, $n \in \mathbb{Z}$), $\forall \varepsilon > 0$, intervalul deschis $(n - \varepsilon, n + \varepsilon)$ nu este conţinut în $\mathbb{N}$ (respectiv, $\mathbb{Z}$), deoarece conţine şi numere care nu sunt întregi (a se vedea, de exemplu, teorema 1.2.8).

Nici $\mathbb{Q}$ nu este vecinătate pentru niciunul din elementele sale (pentru justificare se aplică teorema 1.2.8).

TEOREMA 1.2.9. *(proprietatea de separaţie* HAUSDORFF*) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \neq y$, atunci există vecinătăţi disjuncte ale lor.*

DEMONSTRAŢIE. Din $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = |x - y| > 0$. Fie $\alpha = d(x, y)$. Fie intervalele

$$U = \left(x - \frac{\alpha}{3}, x + \frac{\alpha}{3}\right) \text{ (care este vecinătate pentru } x\text{)},$$
$$V = \left(y - \frac{\alpha}{3}, y + \frac{\alpha}{3}\right) \text{ (care este vecinătate pentru } y\text{)}.$$

Mulţimile U şi V sunt disjuncte. Într-adevăr, presupunând prin reducere la absurd că $U \cap V \neq \emptyset$, rezultă că există un $z \in U \cap V$, adică $z \in U$ (de unde $d(x, z) < \frac{\alpha}{3}$) şi $z \in V$ (de unde $d(z, y) < \frac{\alpha}{3}$). Atunci

$$\alpha = d(x, y) \overset{(M_3)}{\leq} d(x, z) + d(z, y) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}, \text{ contradicţie.}$$

Deci presupunerea făcută este falsă şi $U \cap V = \emptyset$. ■

OBSERVAŢIA 1.2.10. *Am văzut că există submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ (de exemplu, intervalele deschise) care sunt vecinătăţi pentru orice punct al lor. Clasa tuturor acestor mulţimi, împreună cu $\emptyset$, o vom numi topologia uzuală (naturală) a lui $\mathbb{R}$ şi o vom nota cu τ_0:*

$$\tau_0 = \{D \subset \mathbb{R} \mid D \textit{ este vecinătate pentru orice punct al său sau } D = \emptyset\}$$

Elementele lui τ_0 se numesc mulţimi deschise.

1.3. Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$

Am observat că există submulţimi nevide ale lui $\mathbb{R}$ care nu sunt majorate şi/sau minorate. De exemplu, $\mathbb{N}$ nu admite majoranţi, iar $\mathbb{Z}$ nu admite nici majoranţi, nici minoranţi.

Aceasta conduce la ideea de a considera o mulţime mai amplă, care să conţină pe $\mathbb{R}$ şi în care orice submulţime nevidă să admită infimum şi supremum. În acest scop, facem convenţia de a adjuncţiona la $\mathbb{R}$ două noi obiecte, $-\infty$ = "minus infinit" şi $\infty = +\infty$ = "(plus) infinit". Notăm $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ şi numim această mulţime dreapta reală încheiată sau compactificată.

◇ Prelungim ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, convenind ca

$$-\infty < x,\ x < \infty,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ şi } -\infty < \infty.$$

În acest fel, $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ este total ordonată.

◇ Prelungim operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ (fără a le defini însă peste tot!). Astfel,
$x+\infty=\infty+x=\infty,\ \forall x\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{-\infty\}$ (inclusiv $\infty+\infty=\infty$)
$x+(-\infty)=-\infty+x=-\infty,\ \forall x\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{\infty\}$ (şi $-\infty+(-\infty)=-\infty$)
DAR $\infty+(-\infty)$, $-\infty+\infty$ nu au sens!
$x\cdot\infty=\infty\cdot x=\infty,\ \forall x\in\overline{\mathbb{R}},\ x>0$ (inclusiv $\infty\cdot\infty=\infty$)
$x\cdot\infty=\infty\cdot x=-\infty,\ \forall x\in\overline{\mathbb{R}},\ x<0$ (inclusiv $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$)
DAR $0\cdot\infty$, $0\cdot(-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nu au sens!

◇ Ţinând seama de relaţia de ordine din $\overline{\mathbb{R}}$, putem extinde în $\overline{\mathbb{R}}$ notaţiile folosite pentru diferitele tipuri de intervale. Astfel, dacă $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, cu $a<b$, introducem:
– intervalul deschis $(a,b)=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\mid a<x<b\}$;
– intervalele semi-deschise
$$[a,b)=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\mid a\le x<b\},\quad (a,b]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\mid a<x\le b\};$$
– intervalul închis $[a,b]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\mid a\le x\le b\}$.

◇ Fie acum $\emptyset\ne A\subset\mathbb{R}$. Dacă A este majorată, atunci, conform axiomei CANTOR-DEDEKIND, există $\sup A\in\mathbb{R}$. Dacă A nu este majorată, atunci $\sup A\overset{def.}{=}+\infty$.
La fel, dacă A este minorată, atunci, conform teoremei 1.2.4, există $\inf A\in\mathbb{R}$. Dacă A nu este minorată, atunci $\inf A\overset{def.}{=}-\infty$.
În felul acesta orice submulţime nevidă A a lui $\overline{\mathbb{R}}$ are şi sup, şi inf.

◇ Explicăm ce se înţelege prin vecinătăţi pentru $\pm\infty$.

DEFINIŢIA 1.3.1. *a) Numim vecinătate a punctului $+\infty$ orice mulţime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a,+\infty]$, unde $a\in\mathbb{R}$.*
b) Numim vecinătate a punctului $-\infty$ orice mulţime $U\subset\overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $[-\infty,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

OBSERVAŢIA 1.3.1. *Din cele două definiţii anterioare rezultă că intervalele de forma $(a,+\infty]$, cu $a\in\mathbb{R}$, sunt vecinătăţi ale punctului $+\infty$, iar intervalele de forma $[-\infty,a)$, cu $a\in\mathbb{R}$, sunt vecinătăţi ale punctului $-\infty$.*

Dacă $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, notăm mulţimea vecinătăţilor sale cu $\mathcal{V}(x_0)$.

Vom spune că o mulţime $\widetilde{D}\subset\overline{\mathbb{R}}$ este deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă este vecinătate pentru orice punct al său sau este $\emptyset$ (pentru $x\in\widetilde{D}\cap\mathbb{R}$, $\widetilde{D}$ este vecinătate a lui x dacă $\exists\varepsilon>0$ astfel încât $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset\widetilde{D}$).

Clasa tuturor mulţimilor deschise ale lui $\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte topologia uzuală (naturală) a lui $\overline{\mathbb{R}}$ şi se notează cu $\overline{\tau_0}$. O mulţime $\widetilde{D}\in\overline{\tau_0}$ dacă este de una din următoarele forme: D, $D\cup(a,+\infty]$, $D\cup[-\infty,b)$,

$D \cup [-\infty, b) \cup (a, +\infty]$, unde $D \in \tau_0$ (τ_0=topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$), $a, b \in \mathbb{R}$.

CAPITOLUL 2

Şiruri de numere reale

Definiţia 2.0.2. *Se numeşte şir de numere reale (şir numeric) o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm $f(n) = a_n$; a_n poartă numele de termen general (termen de rang n) al şirului. Obţinem în acest fel şirul

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots,$$

notat pe scurt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n).

Exemple.

- şirul numerelor naturale pare: $0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$
- progresia aritmetică cu primul termen $a \in \mathbb{R}$ şi raţia $r \neq 0$:

$$a, a+r, a+2r, a+3r, \ldots, a+nr, a+(n+1)r, \ldots$$

- progresia geometrică cu primul termen $a \in \mathbb{R}^*$ şi raţia $q \neq 0$:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^n, aq^{n+1}, \ldots$$

Definiţia 2.0.3.

a) Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este majorat dacă mulţimea termenilor săi este majorată, adică dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n \leq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este minorat dacă mulţimea termenilor săi este minorată, adică dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este mărginit dacă mulţimea termenilor săi este mărginită, adică dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha \leq a_n \leq \beta, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(sau, echivalent, dacă există $M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

d) Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este nemărginit dacă nu este mărginit (adică dacă nu este majorat sau nu este minorat sau ambele).

Exemple.

- şirul $a_n = \frac{2n+1}{3n+1}$, cu $n \in \mathbb{N}$, este mărginit, deoarece

$$0 < a_n \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

- şirul $a_n = n$, cu $n \in \mathbb{N}$, este minorat de 0, dar nu este majorat; prin urmare, este un şir nemărginit;
- şirul $a_n = -n$, cu $n \in \mathbb{N}$, este majorat de 0, dar nu este minorat; prin urmare, este un şir nemărginit;

- şirul $a_n = (-1)^n n$, cu $n \in \mathbb{N}$, este nemărginit (nu este nici minorat, nici majorat).

DEFINIŢIA 2.0.4.

a) *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este crescător dacă* $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *adică dacă* $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$

b) *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este strict crescător dacă* $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *adică dacă* $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$

c) *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este descrescător dacă* $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *adică dacă* $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$

d) *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este strict descrescător dacă* $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *adică dacă* $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

e) *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este monoton dacă este crescător sau descrescător.*

f) *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este strict monoton dacă este strict crescător sau strict descrescător.*

Studiul monotoniei unui şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$**:**

- comparăm cu 0 diferenţa $a_{n+1} - a_n$ a doi termeni consecutivi oarecare din şir;
- **dacă** $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, putem, echivalent, compara cu 1 raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a doi termeni consecutivi oarecare din şir.

EXEMPLE.

- şirul de termen general $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, este strict crescător, deoarece

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} \\
&= \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + n - n^2 - 2n + n + 2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

- şirul de termen general $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{5\cdot 10\cdot 15\cdot \ldots \cdot (5n)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este strict descrescător, deoarece

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{5\cdot 10\cdot 15\cdot \ldots\cdot (5n)\cdot [5(n+1)]}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{5\cdot 10\cdot 15\cdot \ldots\cdot (5n)}} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{5\cdot 10\cdot 15\cdot \ldots\cdot (5n)\cdot (5n+5)} \cdot \frac{5\cdot 10\cdot 15\cdot \ldots\cdot (5n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)} \\
&= \frac{2n+1}{5n+5} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}
$$

- şirul de termen general $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, **nu** este monoton, deoarece termenii săi de rang par sunt strict pozitivi, iar termenii

de rang impar, strict negativi ($a_{2n} = 1 > -1 = a_{2n+1} < 1 = a_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

DEFINIŢIA 2.0.5. *Fie şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *şi* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *un şir strict crescător. Şirul* $b_k = a_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *se numeşte subşir al şirului* (a_n).

EXEMPLU. Şirul de termen general $a_n = (-2)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ are drept subşiruri pe $a_{2n} = (-2)^{2n} = 2^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $a_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEFINIŢIA 2.0.6. *(definiţia limitei unui şir cu vecinătăţi) Spunem că un şir de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *are limita* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *dacă* $\forall V \in \mathcal{V}(a)$ $\exists n_V \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_V$, *avem* $a_n \in V$ *(adică dacă orice vecinătate a lui a conţine toţi termenii şirului, de la un loc încolo).*

Notaţii: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *sau* $a_n \to a$.

TEOREMA 2.0.1. *(de caracterizare a limitei unui şir) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *(definiţia cu vecinătăţi)*
ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|a_n - a| < \varepsilon$ *(în cuvinte: de la un loc încolo, toţi termenii şirului sunt oricât de aproape de limita şirului).*

TEOREMA 2.0.2. *(de caracterizare a limitelor infinite pentru şiruri) Fie şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Atunci:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon$, $a_n > \varepsilon$.
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon$, $a_n < -\varepsilon$.

DEFINIŢIA 2.0.7. *Spunem că şirul* (a_n) *este convergent dacă are limită finită (adică dacă* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$*).*

Spunem că şirul (a_n) *diverge (este divergent) dacă* (a_n) *nu este convergent.*

Altfel spus, un şir numeric este divergent dacă şi numai dacă fie nu are limită, fie are limita $-\infty$ sau $+\infty$.

Proprietăţi ale şirurilor cu limită:

1) (unicitatea limitei) Dacă un şir are limită, atunci aceasta este unică.
2) Orice şir convergent este mărginit.
   Corolar: Orice şir nemărginit este divergent.
3) (lema lui CESÀRO) Din orice şir mărginit putem extrage un *subşir* convergent.
4) Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită ca şi şirul iniţial.
   Corolar: Dacă un şir are două subşiruri convergente la limite diferite, atunci este divergent.

5) (operaţii cu şiruri care au limită) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, cu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}.$$

Atunci:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$

v) dacă $b \neq 0$, atunci $b_n \neq 0$ de la un loc încolo şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Formulele de calcul de mai sus se extind şi pentru limite infinite, **dacă** operaţiile au sens. Amintim *operaţiile fără sens:* $\infty + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

6) (teorema cleştelui) Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (sau, suficient, de la un loc încolo) şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

7) (trecerea la limită în inegalităţi) Dacă $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (sau, suficient, de la un loc încolo) şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, atunci $a \leq b$.

Facem observaţia că şi atunci când $a_n < b_n$ de la un loc încolo, inegalitatea între limite este tot **ne**strictă (de exemplu, $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi totuşi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$).

8) (criteriul majorării) Dacă $|a_n - a| \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (sau, suficient, de la un loc încolo) şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.

10) Produsul dintre un şir mărginit şi un şir cu limita 0 este un şir cu limita 0.

Exemplu. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ pentru că şirul $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit ($|\sin n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$), iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Teorema 2.0.3. *(teorema lui* Weierstrass*) Dacă un şir este monoton şi mărginit, atunci este convergent.*

Reciproca teoremei lui Weierstrass nu este adevărată. Cu toate că dacă un şir este converegent, atunci este mărginit, totuşi există şiruri convergente care nu sunt monotone. De exemplu, şirul $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la 0 (deoarece $|a_n| = \frac{1}{n} \to 0$), dar nu este monoton, căci semnul termenilor săi alternează.

Teorema 2.0.4. *Dacă un şir este monoton crescător şi nemărginit superior, atunci are limita $+\infty$.*

Dacă un şir este monoton descrescător şi nemărginit inferior, atunci are limita $-\infty$.

Aşadar, din ultimele două teoreme rezultă că orice şir monoton are limită.

Şiruri remarcabile:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0 \end{cases},$

  unde $k \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, pentru $0 \le i \le k$ şi $a_k \neq 0$.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0\right)}{\left(b_p n^p + b_{p-1}n^{p-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right)} =$$
  $$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } p > k \\ \frac{a_k}{b_k}, & \text{dacă } p = k \\ +\infty \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_p}\right), & \text{dacă } p < k \end{cases},$$

  unde $k, p \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, pentru $0 \le i \le k$, $1 \le j \le p$ şi $a_k, b_p \neq 0$.

- Fie $q \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } q > 1 \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1,1) \\ \text{nu există}, & \text{dacă } q \le -1 \end{cases}$

- Şirul de termen general $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este strict crescător, iar şirul $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este strict descrescător. Amândouă converg la $e \cong 2,71$ şi

  $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  Mai mult, pentru orice şir numeric $a_n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

  În plus, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$.

- Şirul de termen general $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este strict descrescător şi converge la numărul $c \cong 0,57$, numit constanta lui Euler.

  În consecinţă,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln n\right] \\ &= c + \infty = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)\right. \\ &+ \left.\ln 2n - \ln n\right] = c - c + \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

Teorema 2.0.5. *(Criteriul raportului) Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$. *Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

i) Dacă $l < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) Dacă $l > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dacă $l = 1$, nu putem preciza natura şirului. De exemplu:

- şirul $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la 0 şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1;$$

- şirul $b_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ este divergent, cu limita $+\infty$, şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Exemple. Studiem cu ajutorul criteriului raportului convergenţa şirurilor:

a) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

b) $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{4} = \frac{5}{4} > 1,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$.

c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

d) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

Deoarece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2,71 > 1,
\end{aligned}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

e) $a_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

Deoarece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot[3(n+1)+1]}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\cdot[4(n+1)+1]}}{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1) \cdot (4n+5)} \cdot \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1,
\end{aligned}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1)} = 0$.

Teorema 2.0.6. *(Teorema lui* Stolz-Cesàro*) Fie (a_n), $(b_n) \subset \mathbb{R}$ satisfăcând ipotezele:*

1) (b_n) strict monoton şi divergent;

2) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$.

Exemple. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}$

a) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ şi $b_n = \ln n$. Avem de calculat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. Pentru aceasta observăm că şirul (b_n) este strict crescător şi

$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, iar

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{(n+1)\ln\frac{n+1}{n}}\\ &= \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Dar $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = 1$, de unde $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ln e = 1$. Conform teoremei lui Stolz-Cesàro, rezultă că şi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ şi $b_n = \sqrt{n}$. Din nou, ne interesează $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Şirul (b_n) este strict crescător şi $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, iar

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}\\ &= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Din teorema lui Stolz-Cesàro obţinem că şi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$.

c) Fie $a_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ şi $b_n = n^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru a calcula $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, observăm că şirul (b_n) este strict crescător ($b_{n+1} = (n+1)^{n+1} > (n+1)^n > n^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$), $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ şi

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n} = \frac{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}}{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}-n^n}\\ &= \frac{n^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n^{n+1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{1}{n}\right]} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{e-0} = 1.\end{aligned}$$

Conform teoremei lui Stolz-Cesàro, rezultă că şi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$.

Consecinţe ale teoremei lui Stolz-Cesàro

a) Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ (altfel spus, dacă un şir are limită, atunci şirul mediilor aritmetice ale primilor n termeni ai acestui şir are aceeaşi limită).

Dacă, în plus, $a_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \neq 0$, atunci avem şi $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = a$ (şirul mediilor armonice ale primilor n termeni ai şirului are aceeaşi limită).

b) Dacă $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$ (dacă un şir are limită, atunci şirul mediilor geometrice ale primilor n termeni ai acestui şir are aceeaşi limită).

c) Dacă $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Demonstraţie.

a) Fie, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ şi $B_n = n$. Şirul (B_n) este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$. Cum există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a,$$

din teorema Stolz-Cesàro rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = a$.

Acum, fie $\tilde{A}_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a},$$

teorema 2.0.6 spune că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tilde{A}_n}{B_n} = \dfrac{1}{a}$. Atunci există şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{\tilde{A}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\tilde{A}_n}{B_n}} = a.$$

b) Concluzia rezultă din inegalitatea mediilor (media armonică $\leq$ media geometrică $\leq$ media aritmetică), din punctul a) şi din lema cleşte.

c)

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} \\
&= \sqrt[n]{a_0} \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Notăm $A_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$; din ipoteză, $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} = a$, ceea ce este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$. Din b) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = a.$$

În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0} = \lim\limits_{n\to\infty} a_0^{\frac{1}{n}} = a_0^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = a_0^0 = 1$.

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \cdot a = a$.

■

Exemple.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} \overset{a)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} \overset{a)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{\pi}{n+1}} \overset{b)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n+1} = \sin 0 = 0$

$(a_n = \sin\frac{\pi}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \overset{c)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ $(a_n = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}.$

Fie $a_n = \frac{n^n}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosim punctul c) al consecinţelor teoremei Stolz-Cesàro. Deoarece

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} \overset{a)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, conform calculului precedent.

CAPITOLUL 3

Serii de numere reale

Ne punem problema de a extinde noţiunea de sumă de la o mulţime finită de numere reale la un şir numeric.

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Îi asociem şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, definit prin:

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0\\
S_1 &= a_0 + a_1\\
S_2 &= a_0 + a_1 + a_2\\
S_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
S_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N} \qquad (3.1)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poartă numele de *şirul sumelor parţiale asociat şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 3.0.8. *Perechea* $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$, *unde şirul* (S_n) *este dat prin* (3.1), *se numeşte* serie *de numere reale (serie numerică)* de termen general a_n.

Pentru această serie folosim notaţiile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ sau

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Definiţia 3.0.9. *Spunem că seria numerică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *al sumelor sale parţiale este convergent. În acest caz scriem* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(C).*

Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergentă dacă nu este convergentă (adică dacă şirul sumelor sale parţiale este divergent). Scriem* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(D).*

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă, limita $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ se numeşte *suma seriei.* Notăm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$ sau $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$.

Dacă $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (sau $-\infty$), spunem că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este $+\infty$ (respectiv, $-\infty$) şi scriem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ (respectiv, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$). (În acest caz seria este divergentă!)

Despre două serii $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ care sunt ambele convergente sau ambele divergente spunem că au aceeaşi natură şi scriem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Exemple.

a) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$ are termenul general al şirului sumelor parţiale

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

şi $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Atunci seria este divergentă şi are suma $\sum_{n=0}^{\infty} n = +\infty$.

b) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ are termenul general al şirului sumelor parţiale

$$S_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

şi $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = +\infty$. Atunci seria este divergentă şi are suma $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = +\infty$.

c) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n^3$ are termenul general al şirului sumelor parţiale

$$S_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

şi $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = +\infty$. Atunci seria este divergentă şi are suma $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 = +\infty$.

d) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ are termenul general al şirului sumelor parţiale

$$S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Cum $\lim_{n\to\infty} S_n = e \in \mathbb{R}$, seria este convergentă, cu suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

e) **Serii telescopice.** O serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, în care termenul general poate fi scris sub forma $a_n = x_n - x_{n+1}$, unde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ este un alt şir, se

numeşte *serie telescopică*. Se observă uşor că termenul general pentru şirul sumelor parţiale asociat unei serii telescopice este dat de

$$S_n = (x_0-x_1)+(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n+1}) = x_0-x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. De exemplu:

- Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ are termenul general al şirului sumelor parţiale

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

  Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 \in \mathbb{R}$, rezultă că seria este convergentă, cu suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ are termenul general al şirului sumelor parţiale

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1-0}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} \\ &= \left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &= \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

  Cum $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, rezultă că seria este divergentă, cu suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = +\infty$.

- Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ are termenul general

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Atunci termenul general al şirului sumelor parţiale

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, rezultă că seria este convergentă, cu suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Serii remarcabile

a) *Seria geometrică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, unde $q \in \mathbb{R}$:
- este convergentă $\Leftrightarrow q \in (-1,1)$ şi are suma $\frac{1}{1-q}$;
- este divergentă $\Leftrightarrow |q| \geq 1$; mai precis, are suma $+\infty$ dacă $q \geq 1$ şi nu are sumă dacă $q \leq -1$.

Într-adevăr, şirul sumelor parţiale are termenul general

$$S_n = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

şi pentru $q = 1$, $S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{de n ori}} = n$, iar pentru $q \neq 1$, $S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, conform formulei pentru suma unei progresii geometrice. Mai departe se folosesc rezultatele obţinute pentru şirul remarcabil $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) *Seria armonică generalizată* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, obţinută în cazul particular $\alpha = 1$, se numeşte *seria armonică* (şi este divergentă, cu suma $+\infty$; a se vedea pagina 19).

De exemplu, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ este convergentă ($\alpha = 3 > 1$), iar seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-4}}$ sunt divergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$, respectiv $\alpha = -4 < 1$).

TEOREMA 3.0.7. *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

COROLAR 3.0.1. *Dacă şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu converge la 0, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Altfel spus, dacă nu există $\lim_{n\to\infty} a_n$ sau există $\lim_{n\to\infty} a_n$, dar $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.

EXEMPLE.

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ este divergentă, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \neq 0.$$

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ este divergentă, deoarece nu există $\lim_{n\to\infty} a_n$. Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$, iar $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-2n-1) = -\infty$, deci şirul (a_n) are două subşiruri tinzând la limite diferite.

OBSERVAŢIA 3.0.2. *Reciproca teoremei 3.0.7* nu *este adevărată: condiţia* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nu *atrage după sine convergenţa seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

De exemplu, seria armonică $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă, deşi* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

TEOREMA 3.0.8. *(Proprietăţi generale ale seriilor numerice)*

a) Dacă unei serii i se adaugă sau i se elimină un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă (dar, în cazul convergenţei, suma seriei se schimbă).

b) (produsul cu un scalar) Fie seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}^*$. *Atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi, în caz de convergenţă,* $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

c) (suma a două serii) Fie seriile de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. *Atunci:*

- *dacă ambele serii sunt convergente, atunci şi seria sumă* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)$ *este convergentă, iar* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- *dacă una dintre serii este convergentă şi cealaltă, divergentă, atunci seria sumă este divergentă.*
- *dacă ambele serii sunt divergente, atunci seria sumă ar putea fi convergentă sau divergentă.*

De exemplu, seriile $\sum_{n=0}^{\infty} (-n)$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} n$ *sunt divergente, iar seria sumă,* $\sum_{n=0}^{\infty} (-n+n) = \sum_{n=0}^{\infty} 0$, *este convergentă, cu suma 0. Pe de altă parte, atât seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$, *cât şi suma lor,* $\sum_{n=0}^{\infty} (n+n^2)$, *sunt divergente (toate au suma* $+\infty$*).*

3.1. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

TEOREMA 3.1.1. *(Criteriul de comparaţie de speţa I) Fie seriile numerice* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$*, cu* $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(sau, suficient, de la un loc încolo).*

a) Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(C), atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(C).*

b) Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(D), atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(D).*

TEOREMA 3.1.2. *(Criteriul de comparaţie cu limită) Fie seriile numerice* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$*, cu* $a_n \geq 0$ *şi* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(sau, suficient, de la un loc încolo). Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$.

a) Dacă $l \in (0, \infty)$*, atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

b) Dacă $l = 0$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(C), atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(C).*

c) Dacă $l = \infty$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(D), atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(D).*

OBSERVAŢIA 3.1.1. *Drept serii de comparaţie folosim de multe ori serii geometrice sau armonice (generalizate), deoarece natura acestor serii ne este cunoscută.*

EXEMPLE.

a) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$ este convergentă (conform criteriului de comparaţie de speţa I, punctul a)), deoarece $n(n^2+1) = n^3 + n > n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $\frac{1}{n(n^2+1)} < \frac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar seria armonică generalizată cu $\alpha = 3 > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, este convergentă.

b) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ este divergentă (conform criteriului de comparaţie de speţa I, punctul b)), deoarece $\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar seria armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, este divergentă.

c) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}$ este convergentă (conform criteriului de comparaţie cu limită, punctul b)), deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n(n+1)}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

iar seria geometrică cu $q = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, este convergentă.

d) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$ este convergentă (conform criteriului de comparaţie cu limită, punctul a)), deoarece o vom compara cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, care este seria armonică generalizată cu $\alpha = 2 > 1$ şi e convergentă.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+1}{n^4+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2}{n^4+2} = 1 \in (0, \infty).$$

e) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{3n+2}$ este divergentă (conform criteriului de comparaţie cu limită, punctul a)), deoarece o vom compara cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, care este seria armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ şi e divergentă.

Observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+3}{3n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3\sqrt{n}}{3n+2} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Teorema 3.1.3. *(Criteriul rădăcinii cu limită (*Cauchy-Hadamard*))* *Fie seria numerică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, *cu* $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(sau, suficient, de la un loc încolo). Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$.

a) Dacă $l < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(C).*

b) Dacă $l > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(D).*

Observaţia 3.1.2. *Dacă* $l = 1$, *atunci nu putem preciza natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(caz de dubiu).*

De exemplu, seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (seria armonică generalizată cu $\alpha = 2 > 1$) este convergentă. Totuşi, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$ (vezi limita d), pagina 24).

Deci criteriul rădăcinii nu poate fi folosit pentru studiul convergenţei seriilor cu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Exemple.

a) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n$ este convergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0 < 1.$$

b) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n{\cdot}4^n$ este divergentă deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\cdot 4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{n} = 4 > 1$ (vezi limita d), pagina 24).

Teorema 3.1.4. *(Criteriul raportului cu limită (*D'Alembert*)) Fie seria numerică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$*, cu* $a_n > 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *(sau, suficient, de la un loc încolo). Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$.

a) Dacă $l < 1$*, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(C).*

b) Dacă $l > 1$*, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(D).*

Observaţia 3.1.3. *Dacă* $l = 1$*, atunci nu putem preciza natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(caz de dubiu).*

Pentru a exemplifica luăm aceleaşi două serii, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, prima divergentă şi a doua convergentă. Totuşi, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$.

Deci criteriul raportului nu poate fi folosit pentru studiul convergenţei seriilor cu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Exemple.

a) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ este divergentă deoarece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)\cdot[5(n+1)+1]}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot[2(n+1)+1]}}{\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)\cdot(5n+6)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{2n+3} = \frac{5}{2} > 1.
\end{aligned}$$

b) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ este convergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1.$$

Dacă aplicând criteriul raportului ajungem în cazul de dubiu, putem încerca să utilizăm:

Teorema 3.1.5. *(Criteriul lui* Raabe-Duhamel*) Fie seria numerică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$*, cu* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(sau, suficient, de la un loc încolo). Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l \in [0, +\infty]$.

a) Dacă $l > 1$*, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(C).*

b) Dacă $l < 1$*, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(D).*

Observaţia 3.1.4. *Dacă* $l = 1$*, atunci nu putem preciza natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(caz de dubiu).*

Exemplu. Pentru seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$ nu funcţionează criteriul raportului, deoarece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot[3(n+1)+1]}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)\cdot[3(n+1)+2]}}{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)\cdot(3n+5)} \cdot \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{3n+5} = 1.
\end{aligned}$$

Aplicăm atunci criteriul lui Raabe-Duhamel şi constatăm că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n+5}{3n+4} - 1\right) = \frac{n}{3n+4} = \frac{1}{3} < 1,$$

adică seria studiată este divergentă.

3.2. Serii alternate

Definiţia 3.2.1. *O serie de numere reale care are una din formele* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *sau* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$*, unde* $a_n \geq 0$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*, se numeşte serie alternată.*

Într-o astfel de serie termenii alternează ca semn.

Teorema 3.2.1. *(Criteriul lui* Leibniz*) Fie seria alternată* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$*, cu* $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$*. Dacă şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, atunci seria este convergentă.*

Exemplu. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, deoarece şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi tinde la 0.

3.3. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

TEOREMA 3.3.1. *(Criteriul lui* DIRICHLET*) Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *are şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *al sumelor parţiale mărginit, iar şirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi convergent la 0, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.*

TEOREMA 3.3.2. *(Criteriul lui* ABEL*) Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă, iar şirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.*

EXEMPLE.

a) Studiem convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$. Luăm

$$a_n = \sin n \sin n^2,\ b_n = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

şi aplicăm criteriul lui DIRICHLET. Este evident că $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. În plus, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ are şirul sumelor parţiale

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin k \sin k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^2-k) - \cos(k^2+k)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [\cos(k-1)k - \cos k(k+1)] = \frac{1}{2}[\cos 0\cdot 1 - \cos 1\cdot 2 + \cos 1 \cdot 2 \\
&\quad - \cos 2\cdot 3 + \cdots + \cos(n-1)n - \cos n(n+1)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos 0 - \cos n(n+1)] = \frac{1}{2}[1 - \cos n(n+1)]
\end{aligned}$$

şi $|S_n| = \frac{1}{2}|1-\cos n(n+1)| \le \frac{1}{2}(1+|\cos n(n+1)|) \le \frac{1}{2}(1+1) = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit.

Din criteriul lui DIRICHLET rezultă atunci că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$ este convergentă.

b) Studiem convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2 \cos \frac{1}{n}}{n}$. Luăm

$$a_n = \frac{\sin n \sin n^2}{n},\ b_n = \cos\frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

şi aplicăm criteriul lui ABEL. În exerciţiul anterior am demonstrat că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. Pe de altă parte, şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit ($|\cos\frac{1}{n}| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$) şi crescător ($1 \ge \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar cos

este funcţie descrescătoare pe $(0, \frac{\pi}{2}) \supset (0, 1]$, prin urmare $\cos\frac{1}{n} < \cos\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$).

Din criteriul lui ABEL concluzionăm că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2 \cos\frac{1}{n}}{n}$ este convergentă.

Serii absolut convergente

DEFINIŢIA 3.3.1. *Seria numerică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, *este convergentă.*

TEOREMA 3.3.3. *Dacă o serie numerică este absolut convergentă, atunci este şi convergentă.*

Putem utiliza această teoremă pentru a demonstra convergenţa anumitor serii care au o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi. Avantajul este că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, deci pentru a o studia se pot aplica rezultatele din paragraful 3.1.

EXEMPLU. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ este convergentă, deoarece este absolut convergentă. Într-adevăr, seria modulelor, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^3}{n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$, este convergentă (a se vedea la pagina 32).

Reciproca teoremei 3.3.3 nu este adevărată! De exemplu, am arătat că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă; totuşi, nu este absolut convergentă, deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este o serie divergentă (e seria armonică).

Atunci are sens să introducem următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 3.3.2. *O serie numerică convergentă, dar nu absolut convergentă se numeşte serie semiconvergentă.*

CAPITOLUL 4

Limite de funcţii. Funcţii continue

4.1. Limite de funcţii

DEFINIŢIA 4.1.1. *Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte punct de acumulare pentru mulţimea A dacă orice vecinătate a punctului a are măcar un punct* <u>*diferit de a*</u> *comun cu mulţimea A, adică dacă*

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \text{ are loc } (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

sau, echivalent,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ are loc } (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset.$$

Mulţimea punctelor de acumulare pentru mulţimea A poartă numele de mulţimea derivată a lui A şi se notează cu A'.

TEOREMA 4.1.1. *(de caracterizare a punctelor de acumulare cu şiruri)*

$$a \in A' \Leftrightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\} \text{ astfel încât } a_n \to a.$$

EXEMPLE.

a) Nicio mulţime finită nu are puncte de acumulare.
b) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}' = \{0\}$.
c) $[a,b]' = [a,b)' = (a,b]' = (a,b)' = [a,b]$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
d) $\mathbb{N}' = +\infty$ (luăm $a_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ în teorema 4.1.1), $\mathbb{Z}' = \{-\infty, +\infty\}$ (luăm $a_n^1 = -n$, respectiv $a_n^2 = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ în teorema 4.1.1), $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}' = \mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 4.1.2. *Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi un punct $a \in A'$. Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul a dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l)$ $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V$ (adică $f(x) \in V$, $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$).*

Altfel spus, funcţia f are limita l în punctul a de acumulare pentru A dacă de îndată ce luăm puncte x din A suficient de apropiate de a, *dar nu egale cu* a, $f(x)$ se apropie oricât de mult de l.

Notăm $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

TEOREMA 4.1.2. *(unicitatea limitei) Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică.*

TEOREMA 4.1.3. *(de caracterizare a limitei unei funcţii într-un punct) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *(definiţia cu vecinătăţi)*
ii) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$)

- *dacă* $a, l \in \mathbb{R}$*:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in A \setminus \{a\}$*, cu* $|x - a| < \delta$*, are loc* $|f(x) - l| < \varepsilon$*;*
- *dacă* $a = -\infty$*, punem* $x < -\delta$ *în loc de* $|x - a| < \delta$*;*
- *dacă* $a = +\infty$*, punem* $x > \delta$ *în loc de* $|x - a| < \delta$*;*
- *dacă* $l = -\infty$*, punem* $f(x) < -\varepsilon$ *în loc de* $|f(x) - l| < \varepsilon$*;*
- *dacă* $l = +\infty$*, punem* $f(x) > \varepsilon$ *în loc de* $|f(x) - l| < \varepsilon$*.*

iii) (caracterizarea cu şiruri) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\}$*, cu* $x_n \to a$*, are loc* $f(x_n) \to l$*.*

Observaţia 4.1.1. *Pentru a demonstra că o funcţie nu are limită într-un punct este convenabil uneori să construim două şiruri care tind la punctul respectiv, dar pentru care şirurile imaginilor al limite diferite.*

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$ deoarece există şirurile

$$(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R},\ x_n^1 = 2n\pi \to +\infty,$$
$$(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R},\ x_n^2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty,$$

astfel încât

$$f(x_n^1) = \sin 2n\pi = \sin 0 = 0 \to 0,$$
$$f(x_n^2) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1 \neq 0.$$

Folosind aceleaşi două şiruri se arată că nu există nici $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$. De asemenea, prin transformarea $x = \frac{1}{y}$, rezultă că nu există $\lim\limits_{y\to 0} \sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{y\to 0} \cos\frac{1}{y}$.

Limite laterale

Definiţia 4.1.3. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$*, o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in \mathbb{R}$ *un punct de acumulare pentru mulţimea* $A \cap (-\infty, a)$ *(spunem că* a *este punct de acumulare la stânga pentru* A*). Numărul* $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte limita la stânga a funcţiei* f *în punctul* a *dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$*, cu* $x_n < a$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *şi* $x_n \to a$*, are loc* $f(x_n) \to l_s$*.*

Notăm $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l_s$ sau $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = l_s$.

Definiţia 4.1.4. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$*, o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in \mathbb{R}$ *un punct de acumulare pentru mulţimea* $A \cap (a, +\infty)$ *(spunem că* a *este punct de acumulare la dreapta pentru* A*). Numărul* $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte limita la dreapta a funcţiei* f *în punctul* a *dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$*, cu* $x_n > a$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *şi* $x_n \to a$*, are loc* $f(x_n) \to l_d$*.*

Notăm $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l_d$ sau $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = l_d$.

Limitele la stânga şi la dreapta poartă numele de limite laterale ale funcţiei f în punctul a.

TEOREMA 4.1.4. *(de caracterizare a limitei unei funcţii într-un punct cu ajutorul limitelor laterale) Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare atât la stânga, cât şi la dreapta pentru mulţimea A. Atunci funcţia f are limită în punctul a dacă şi numai dacă f are limită la stânga şi la dreapta în a şi cele două limite laterale sunt egale. Mai mult, în acest caz limita funcţiei f în punctul a este egală cu valoarea comună a celor două limite laterale:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x).$$

Această teoremă este utilă în cazul funcţiilor definite pe ramuri, când ne propunem să studiem existenţa limitei în punctul de ramificaţie.

EXEMPLE.

a) Studiem existenţa limitei în 1 pentru funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

(1 este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$). Deoarece

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1}(2x+1) = 3,$$

$$\lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1}(4-x) = 3,$$

rezultă că există $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

b) Studiem existenţa limitei în 0 pentru funcţia $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ (0 este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}^*$, chiar dacă nu aparţine domeniului de definiţie al funcţiei). Cum

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \neq -\infty,$$

rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Operaţii cu limite de funcţii

Date funcţiile $f, g : A \to \mathbb{R}$ şi punctul $a \in A'$, presupunem că există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) $f+g$ are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2 = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (limita sumei este suma limitelor)
Cazuri exceptate: $\infty + (-\infty)$, $-\infty + \infty$

ii) dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci cf are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x) = cl_1 = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (constantele ies afară din limită)

iii) $f \cdot g$ are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2 = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (limita produsului este produsul limitelor)
Cazuri exceptate: $0 \cdot (\pm\infty)$

iv) dacă $l_2 \neq 0$ (ceea ce implică $g(x) \neq 0$ pe o vecinătate a lui a), atunci $\frac{f}{g}$ are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (limita câtului este câtul limitelor)
Cazuri exceptate: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Alte nedeterminări: 0^0, $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$

Limite fundamentale:

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \text{sgn } (a_k) \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^k$,
unde $k \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, pentru $0 \leq i \leq k-1$ şi $a_k \neq 0$.

ii) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0} =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } p > k \\ \frac{a_k}{b_k}, & \text{dacă } p = k \\ \text{sgn } \left(\frac{a_k}{b_p}\right) \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{k-p}, & \text{dacă } p < k, \end{cases}$$
unde $k, p \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, pentru $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq p-1$ şi $a_k, b_p \neq 0$.

iii) Fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a \in (-1,1) \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \\ \text{nu există}, & a \leq -1 \end{cases}$

iv) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \text{tg } x = +\infty$; $\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \text{tg } x = -\infty$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \text{arctg } x = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arctg } x = -\frac{\pi}{2}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = 1$

vii) dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} \log_a x = -\infty$;
dacă $a \in (0,1)$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} \log_a x = +\infty$

viii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $(\alpha > 0)$

ix) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ $(\alpha > 0)$

x) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ $(n \in \mathbb{N},\ a > 1)$

xi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a \in (0,\infty) \setminus \{1\})$

xii) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

Alte exemple.

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-x^2+x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + x) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$.

Să remarcăm că $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, deoarece $x < 0$ atunci când x este în vecinătatea lui $-\infty$. Atunci limita se rescrie

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = -\frac{1}{2}$$

TEOREMA 4.1.5. *Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, două funcţii $f, g : A \to \mathbb{R}$ şi un punct $a \in A'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ şi dacă există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ pe care g este mărginită, atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$ (pe scurt: produsul dintre o funcţie mărginită şi o funcţie cu limita 0 are limita 0).*

EXEMPLU. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cos x}{x-x^2+1} = 0$ pentru că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-x^2+1} = 0$ (gradul polinomului de la numitor este mai mare decât gradul polinomului de la numărător), iar funcţia cosinus este mărginită pe $\mathbb{R}$ ($|\cos x| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$).

TEOREMA 4.1.6. *(Criteriul majorării) Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, două funcţii $f, g : A \to \mathbb{R}$ şi un punct $a \in A'$. Dacă există $l \in \mathbb{R}$ şi $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x) - l| \leq g(x)$, $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*

TEOREMA 4.1.7. *(Trecerea la limită în inegalităţi)*

a) *Fie o mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$, două funcţii $f, g : A \to \mathbb{R}$ şi un punct $a \in A'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ (sau $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$), atunci $l_1 \leq l_2$.*
b) *Fie o mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$, o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ şi un punct $a \in A'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Dacă există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ şi două valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ (sau $\alpha < f(x) < \beta$, $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$), atunci $\alpha \leq l \leq \beta$.*

OBSERVAŢIA 4.1.2. *Chiar dacă inegalităţile din ipotezele celor două subpuncte ale teoremei 4.1.7 sunt stricte, inegalităţile dintre limite sunt, în general, <u>ne</u>stricte. Altfel spus, prin trecerea la limită în inegalităţi inegalităţile stricte se transformă în inegalităţi nestricte.*

EXEMPLE.

a) Fie $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$. Deoarece $x < x + 1$, pentru orice $x > 0$, rezultă că $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$, prin urmare $1 - \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$, adică, echivalent, $f(x) < g(x)$, $\forall x > 0$. Cu toate acestea, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$.

b) Fie $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Deoarece $x > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{x} < 1$, rezultă că are loc $0 < f(x) < 1$, $\forall x > 1$. Totuşi, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1$.

4.2. Funcţii continue

DEFINIŢIA 4.2.1. *a) Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, *un punct* $\underline{a \in A}$ *şi o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$. *Spunem că funcţia* f *este continuă în punctul* a *dacă* $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$ $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $f(U \cap A) \subset V$ (adică $f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap A$) (cu alte cuvinte, f este continuă în punctul a <u>din domeniul său de definiţie</u> dacă de îndată ce luăm puncte x din A suficient de apropiate de a, $f(x)$ se apropie oricât de mult de $f(a)$).

b) Spunem că o funcţie este discontinuă într-un punct din domeniul său de definiţie dacă nu este continuă în acel punct.

c) Spunem că funcţia f *este continuă pe o mulţime* A *dacă* f *este continuă în fiecare punct din* A.

TEOREMA 4.2.1. *(de caracterizare a continuităţii punctuale) Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, *un punct* $a \in A$ *şi o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *este continuă în punctul* a *(definiţia cu vecinătăţi);*

ii) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$*)* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in A$, *cu* $|x - a| < \delta$, *are loc* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

iii) (caracterizarea cu şiruri)
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, *cu* $x_n \to a$, *are loc* $f(x_n) \to f(a)$.

OBSERVAŢIA 4.2.1. *Pentru a discuta existenţa limitei* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *nu este obligatoriu ca* a *să aparţină domeniului de definiţie a lui* f; *în schimb, pentru a pune problema continuităţii lui* f *în* a *trebuie ca* f *să fie definită în* a.

Ne amintim că pentru a calcula limita unei funcţii într-un punct a trebuie ca a să fie punct de acumulare pentru domeniul de definiţie al funcţiei, ceea ce nu este obligatoriu la studiul continuităţii. Totuşi, se observă uşor din definiţia 4.2.1a) că orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă în toate punctele izolate din A (punctele care aparţin lui A, dar nu sunt puncte de acumulare pentru A); într-adevăr, $\forall a \in A \setminus A'$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ pentru care $(U \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$ sau, echivalent, $U \cap A = \{a\}$ şi atunci $f(U \cap A) = f(\{a\}) = \{f(a)\} \subset V$, oricum am alege $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Din acest motiv suntem interesaţi mai mult de studiul continuităţii în punctele din A care sunt şi puncte de acumulare pentru A.

TEOREMA 4.2.2. *Fie* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$. *Atunci* f *este continuă în* $a \Leftrightarrow$ *există* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

OBSERVAŢIA 4.2.2. *Funcţiile elementare (adică funcţiile polinomiale, funcţiile raţionale, funcţia putere, funcţia radical, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică, funcţiile trigonometrice directe şi inverse) sunt continue pe domeniile lor maxime de definiţie.*

Teorema 4.2.3. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, *un punct* $a \in A$ *şi două funcţii* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *continue în* a. *Atunci:*

a) $f + g$ *este continuă în* a;
b) cf *este continuă în* a, *pentru orice constantă* $c \in \mathbb{R}$;
c) $f - g$ *este continuă în* a;
d) fg *este continuă în* a;
e) dacă $g(a) \neq 0$, *atunci* $\frac{f}{g}$ *este continuă în* a;
f) $|f|$ *(modulul lui* f*) este o funcţie continuă în* a;
g) $\max\{f, g\}$ *şi* $\min\{f, g\}$ *sunt funcţii continue în* a.

La subpunctul g) ne-am referit la funcţiile:

$$\max\{f, g\} : A \to \mathbb{R},\ \max\{f, g\}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{dacă } f(x) < g(x); \end{cases}$$

$$\min\{f, g\} : A \to \mathbb{R},\ \min\{f, g\}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \leq g(x) \\ g(x), & \text{dacă } f(x) > g(x). \end{cases}$$

Teorema 4.2.4. *Fie două mulţimi* $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$, *un punct* $a \in A$ *şi două funcţii:* $f : A \to B$, *continuă în* a, *şi* $g : B \to \mathbb{R}$, *continuă în* $f(a)$. *Atunci funcţia* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ *este continuă în punctul* a *(pe scurt, compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă).*

Continuitate laterală. Puncte de discontinuitate de prima şi a doua speţă

Definiţia 4.2.2. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, *o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $a \in A$.

a) Dacă a *este şi punct de acumulare la stânga pentru* A, *spunem că* f *este continuă la stânga în* a *dacă există* $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$.
b) Dacă a *este şi punct de acumulare la dreapta pentru* A, *spunem că* f *este continuă la dreapta în* a *dacă există* $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$.

Teorema 4.2.5. *(de caracterizare a continuităţii cu ajutorul continuităţii laterale) Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, *o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $a \in A$, *care este punct de acumulare la stânga şi la dreapta pentru* A. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în* a.

Definiţia 4.2.3. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, *o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $a \in A$ *de discontinuitate pentru* f. *Spunem că punctul* a *este:*

a) punct de discontinuitate de speţa I pentru f *dacă există*

$$\lim_{x \nearrow a} f(x),\ \lim_{x \searrow a} f(x) \in \mathbb{R}$$

(dar f *nu este continuă în* a*);*

b) punct de discontinuitate de speţa a II*-a pentru* f *dacă nu este punct de discontinuitate de speţa I pentru* f *(adică dacă ori măcar una din limitele laterale este infinită, ori măcar una din limitele laterale nu există).*

EXEMPLU. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \le -1 \\ \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-1,0) \\ \frac{1}{x-1}, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ x, & \text{dacă } x \in [1,2) \\ x^2-x, & \text{dacă } x \ge 2 \end{cases}$$

SOLUŢIE.

- Pentru $x \in (-\infty,-1)$, $f(x) = x-1$ şi este continuă (fiind polinom).
- Pentru a studia continuitatea funcţiei f în punctul $x = -1$ trebuie să-i calculăm limitele laterale:

$$f_s(-1) = \lim_{x\nearrow -1} f(x) = \lim_{x\nearrow -1}(x-1) = -2;$$
$$f_d(-1) = \lim_{x\searrow -1} f(x) = \lim_{x\searrow -1} \sin\frac{1}{x} = \sin(-1) \in (-1,1).$$

  În plus, $f(-1) = (x-1)|_{x=-1} = -2$. Deoarece cele două limite laterale iau valori distincte, reale, f nu este continuă în punctul $x = -1$, iar $x = -1$ este punct de discontinuitate de speţa I pentru f; totuşi, $f_s(-1) = f(-1)$, deci f este continuă la stânga în $x = -1$.
- Pentru $x \in (-1,0)$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ şi este continuă (prin compunere de funcţii elementare).
- Pentru a studia continuitatea funcţiei f în punctul $x = 0$ analizăm limitele laterale: limita la stânga nu există (a se vedea la pagina 38), prin urmare $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a II-a pentru f; în schimb,

$$f_d(0) = \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

  şi $f(0) = \frac{1}{x-1}|_{x=0} = -1 = f_d(0)$, deci f este continuă la dreapta în punctul $x = 0$.
- Pentru $x \in (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ şi este continuă (fiind funcţie raţională).
- Pentru a studia continuitatea funcţiei f în punctul $x = 1$ trebuie să-i calculăm limitele laterale:

$$f_s(1) = \lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0_-} = -\infty;$$
$$f_d(1) = \lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1} x = 1.$$

  În plus, $f(1) = x|_{x=1} = 1$. Deoarece limita la stânga este infinită, f nu este continuă în punctul $x = 1$, iar $x = 1$ este punct de discontinuitate de speţa a II-a pentru f; totuşi, $f_d(1) = f(1)$, deci f este continuă la dreapta în $x = 1$.
- Pentru $x \in (1,2)$, $f(x) = x$ şi este continuă (fiind polinom).

- Pentru a studia continuitatea funcţiei f în punctul $x = 2$ îi calculăm limitele laterale:

$$\begin{aligned} f_s(2) &= \lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \nearrow 2} x = 2; \\ f_d(2) &= \lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} (x^2 - x) = 2. \end{aligned}$$

În plus, $f(-1) = (x^2 - x)|_{x=2} = 2$. Cum $f_s(2) = f_d(2) = f(2)$, funcţia f este continuă în $x = 2$.
- Pentru $x \in (2, \infty)$, $f(x) = x^2 - x$ şi este continuă (fiind polinom).

În concluzie, f este continuă pe mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Discontinuităţile funcţiilor monotone

Definiţia 4.2.4. *Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că f este:*

i) crescătoare dacă $\forall x, y \in A$, cu $x < y$, are loc $f(x) \leq f(y)$;
ii) descrescătoare dacă $\forall x, y \in A$, cu $x < y$, are loc $f(x) \geq f(y)$;
iii) monotonă dacă este crescătoare sau descrescătoare;
iv) strict crescătoare dacă $\forall x, y \in A$, cu $x < y$, are loc $f(x) < f(y)$;
v) strict descrescătoare dacă $\forall x, y \in A$, cu $x < y$, are loc $f(x) > f(y)$;
vi) strict monotonă dacă este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Teorema 4.2.6. *O funcţie monotonă are cel mult puncte de discontinuitate de speţa I.*

Proprietăţi ale funcţiilor continue definite pe intervale

Teorema 4.2.7. *(teorema lui* Weierstrass*) O funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit este mărginită şi îşi atinge marginile pe acel interval.*

Mai precis: dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$, atunci există o constantă $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, pentru orice $x \in [a, b]$; mai mult, există două puncte $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_1) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ şi $f(x_2) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Teorema 4.2.8. *O funcţie continuă duce un interval într-un interval, adică dacă $f : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe I, atunci imaginea lui f, $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, este tot un interval.*

Teorema precedentă spune că funcţiile continue au proprietatea lui Darboux.

Teorema 4.2.9. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există măcar un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$. Dacă f este şi strict monotonă, atunci punctul c este unic.*

Această teoremă afirmă că dacă o funcţie continuă ia valori de semne opuse în capetele unui interval, atunci în mod necesar ea se anulează în interiorul acelui interval.

Aplicaţie. Ecuaţia $x^3 - 4x + 1 = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(0, 1)$.

Într-adevăr, funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 1$ este continuă pe intervalul $[0, 1]$ (e polinom) şi $f(0) = 1 > 0$, iar $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$, de unde $f(0)f(1) < 0$. Din teorema 4.2.9 rezultă atunci că există măcar un $c \in (0, 1)$ astfel încât $f(c) = 0$. Acest c este soluţia căutată a ecuaţiei!

Teorema 4.2.10. *Dacă $f : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe I, care nu se anulează pe I, atunci f are semn constant pe tot intervalul I (altfel spus, $f(x) > 0$, $\forall x \in I$ sau $f(x) < 0$, $\forall x \in I$).*

Aplicaţie. Să se rezolve inecuaţia $x^3 + x^2 - 2x > 0$.

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x + 2)(x - 1)$. A rezolva inecuaţia din enunţ este echivalent cu a găsi punctele x în care $f(x) < 0$.

Funcţia f este continuă şi este clar că -2, 0, 1 sunt singurele puncte în care se anulează. Din teorema 4.2.10, pe fiecare din intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ şi $(1, \infty)$ funcţia f are semn constant; pentru a stabili dacă funcţia este strict pozitivă sau strict negativă pe unul din aceste intervale este suficient să calculăm valoarea funcţiei într-un singur punct, ales la întâmplare din intervalul respectiv.

Cum $-3 \in (-\infty, -2)$ şi $f(-3) = -27 + 9 + 6 = -12 < 0$, rezultă că $f < 0$ pe tot intervalul $(-\infty, -2)$.

Cum $-1 \in (-2, 0)$ şi $f(-1) = -1 + 1 + 2 > 0$, rezultă că $f > 0$ pe tot intervalul $(-2, 0)$.

Cum $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ şi $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8} < 0$, rezultă că $f < 0$ pe tot intervalul $(0, 1)$.

În final, cum $2 \in (1, \infty)$ şi $f(2) = 8 + 4 - 4 = 8 > 0$, rezultă că $f > 0$ pe tot intervalul $(1, \infty)$.

Obţinem tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-\,-$	0	$+\,+$	0	$-\,-$	0	$+\,+$	

Aşadar, $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

CAPITOLUL 5

Funcţii derivabile

5.1. Definiţii

DEFINIŢIA 5.1.1. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$*, o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $a \in A \cap A'$*.*

a) Spunem că funcţia f *are derivată în* a *dacă există* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$*; în acest caz notăm* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ *şi o numim derivata funcţiei* f *în punctul* a*.*

b) Spunem că funcţia f *este derivabilă în punctul* a *dacă există* $f'(a) \in \mathbb{R}$*.*

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ a derivatei unei funcţii într-un punct: Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in A \cap A'$, atunci dreapta de ecuaţie $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ este tangenta la graficul funcţiei f în punctul de coordonate $(a, f(a))$.

INTERPRETAREA CINETICĂ a derivatei unei funcţii într-un punct:

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

este viteza instantanee a unei particule care se mişcă pe o dreaptă, dacă funcţia $f(t)$ care dă poziţia particulei la momentul t are proprietatea că limita de mai sus există şi este finită. Raportul $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ dă viteza medie a particulei în intervalul de timp $[t, t+h]$ $\left(= \frac{\text{variaţia poziţiei}}{\text{timpul scurs}}\right)$.

TEOREMA 5.1.1. *Dacă funcţia* $f : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în punctul* $a \in A \cap A'$*, atunci* f *este continuă în* a*.*

Reciproca teoremei 5.1.1 **nu** este adevărată. De exemplu, vom arăta puţin mai târziu că funcţia modul este continuă în 0, fără a fi derivabilă în punctul 0.

DEFINIŢIA 5.1.2. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$*, o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $a \in A$*.*

a) Dacă a *este şi punct de acumulare la stânga pentru* A*, spunem că funcţia* f *are derivată la stânga în* a *dacă există* $\lim\limits_{x\nearrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$*; în acest caz notăm* $\lim\limits_{x\nearrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_s(a)$ *şi o numim derivata la stânga a funcţiei* f *în punctul* a*.*

b) Spunem că funcţia f este derivabilă la stânga în punctul a dacă există $f'_s(a) \in \mathbb{R}$.

c) Dacă a este şi punct de acumulare la dreapta pentru A, spunem că funcţia f are derivată la dreapta în a dacă există $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$; în acest caz notăm $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$ şi o numim derivata la dreapta a funcţiei f în punctul a.

d) Spunem că funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul a dacă există $f'_d(a) \in \mathbb{R}$.

Derivatele la stânga şi la dreapta într-un punct se numesc derivate laterale în acel punct.

TEOREMA 5.1.2. *(de caracterizare a derivabilităţii cu ajutorul derivatelor laterale) Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ şi un punct $a \in A$, care este punct de acumulare la stânga şi la dreapta pentru A. Atunci f este derivabilă în a dacă şi numai dacă f este derivabilă la stânga şi la dreapta în a, iar cele două derivate laterale sunt egale; mai mult, în acest caz, valoarea derivatei este egală cu valoarea comună a celor două derivate laterale: $f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a)$.*

OBSERVAŢIA 5.1.1. *Există funcţii care au derivate laterale diferite în anumite puncte. Considerăm ca exemplu funcţia modul,*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Această funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ este polinom, iar în punctul 0 avem:

$$\begin{aligned} f_s(0) &= \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (-x) = 0; \\ f_d(0) &= \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} x = 0; \\ f(0) &= x|_{x=0} = 0, \end{aligned}$$

adică $f_s(0) = f_d(0) = f(0)$.

De asemenea, f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}$ în schimb,

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \nearrow 0} (-1) = -1; \\ f'_d(0) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \nearrow 0} 1 = 1 \neq f'_s(0) \end{aligned}$$

şi, din teorema 5.1.2, rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Prin urmare, funcţia modul este continuă în punctul 0, dar nu este derivabilă în 0.

Tabelul de derivare al funcţiilor elementare şi principalele reguli de derivare sunt amintite în anexa A.1.

Definiţia 5.1.3. *Considerăm un interval deschis nevid* $I \subset \mathbb{R}$ *şi o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$*, derivabilă în punctul* $a \in I$*. Funcţia* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definită prin* $T(h) = f'(a)h,\ \forall h \in \mathbb{R}$ *se numeşte diferenţiala funcţiei* f *în punctul* a *şi se notează cu* $df(a)$*. Altfel spus,*

$$df(a)(h) = f'(a)h,\ \forall h \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Observaţia 5.1.2. *1) În timp ce derivata* $f'(a)$ *este un număr, diferenţiala* $df(a)$ *este o funcţie.*

2) Dacă $g(x) = x,\ \forall x \in I$*, atunci* $g'(x) = 1,\ \forall x \in I$*, prin urmare* $dg(x)(h) = h,\ \forall h \in \mathbb{R}$*. Cu alte cuvinte,* $d(x)(h) = h,\ \forall h \in \mathbb{R}$ *sau, într-o notaţie mai simplă,* $d(x)(h) = h,\ \forall h \in \mathbb{R}$*. Atunci*

$$(5.1) \Leftrightarrow df(a)(h) = f'(a)dx(h),\ \forall h \in \mathbb{R} \Leftrightarrow df(a) = f'(a)dx.$$

Reguli de diferenţiere (obţinute din regulile de derivare):
$d(f+g) = df + dg$
$d(cf) = cdf,\ \forall c \in \mathbb{R}$ constantă
$d(fg) = gdf + fdg$
dacă $g \neq 0$, atunci $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$
$d(f \circ g)(a) = f'(g(a))dg(a)$

5.2. Funcţii derivabile pe un interval

5.2.1. Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat.

Definiţia 5.2.1. *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Un punct $x_0 \in A$ *se numeşte punct de maxim local (maxim relativ) pentru* f *dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel încât* $f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in V \cap A$.

b) Un punct $x_0 \in A$ *se numeşte punct de minim local (minim relativ) pentru* f *dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel încât* $f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in V \cap A$.

c) Un punct $x_0 \in A$ *se numeşte punct de extrem local (extrem relativ) pentru* f *dacă este punct de minim sau de maxim local pentru* f.

d) Un punct $x_0 \in A$ *se numeşte punct de maxim global (maxim absolut) pentru* f *dacă* $f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in A$.

e) Un punct $x_0 \in A$ *se numeşte punct de minim global (minim absolut) pentru* f *dacă* $f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in A$.

f) Un punct $x_0 \in A$ *se numeşte punct de extrem global pentru* f *dacă este punct de minim sau de maxim global pentru* f.

g) Valorile funcţiei f *în punctele de extrem se numesc extremele funcţiei. Dacă există* $x_1 \in A$ *astfel încât* $f(x_1) = \sup_{x \in A} f(x)$*, atunci* $f(x_1)$ *se numeşte valoare maximă a lui* f *pe* A *şi scriem* $f(x_1) = \max_{x \in A} f(x)$*. Dacă*

există $x_2 \in A$ *astfel încât* $f(x_2) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$, *atunci* $f(x_2)$ *se numeşte valoare minimă a lui* f *pe* A *şi scriem* $f(x_2) = \min\limits_{x \in A} f(x)$.

OBSERVAŢIA 5.2.1. *1) Un punct de maxim (minim) global pentru o funcţie este şi punct de maxim (respectiv minim) local pentru acea funcţie. Un punct de extrem local nu este însă neapărat punct de extrem global !*

2) Nu este obligatoriu ca o funcţie să aibă puncte de extrem global. De exemplu, funcţia strict crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nu are nici puncte de maxim, nici de minim global.*

TEOREMA 5.2.1. *(*FERMAT*) Fie un interval nevid* $I \subset \mathbb{R}$, *o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $x_0 \in int\, I$. *Dacă* f *este derivabilă în* x_0 *şi* x_0 *este punct de extrem local pentru* f, *atunci* $f'(x_0) = 0$.

DEFINIŢIA 5.2.2. *Fie* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval nevid. Punctul* $x_0 \in I$ *se numeşte punct critic (punct staţionar) pentru funcţia derivabilă* $f : I \to \mathbb{R}$ *dacă* $f'(x_0) = 0$.

Atunci teorema lui FERMAT poate fi reformulată: *"punctele de extrem local interioare intervalului de definiţie al unei funcţii derivabile se află printre punctele ei critice"*.

OBSERVAŢIA 5.2.2. *1) Ipoteza* $x_0 \in int\, I$ *este esenţială. Dacă punctul de extrem local se găseşte în unul dintre capetele intervalului* I, *concluzia teoremei* ***nu*** *mai are neapărat loc. De exemplu, dacă* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, *atunci* $f(1) = \max\limits_{x \in [0,1]} f(x)$ *şi totuşi* $f'(1) = 1 \neq 0$.

2) Reciproca teoremei lui FERMAT ***nu*** *este adevărată: se poate ca derivata unei funcţii să se anuleze într-un punct care nu este de extrem. De exemplu, funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ *are* $f'(0) = (3x^2)_{|x=0} = 0$, *dar* 0 *nu este punct de extrem nici măcar local pentru funcţie (deoarece* $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$, $\forall x < 0$ *şi* $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$, $\forall x > 0$; *dar orice vecinătate a lui* 0 *conţine atât numere strict negative, cât şi strict pozitive).*

Interpretare geometrică. Teorema lui FERMAT afirmă că în punctele de extrem local interioare intervalului de definiţie al unei funcţii derivabile, graficul funcţiei are tangentă paralelă cu axa absciselor.

5.2.2. Teoreme de medie.

TEOREMA 5.2.2. *(teorema lui* ROLLE*) Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, *cu* $a < b$, *şi o funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Dacă:*

i) f *este continuă pe* $[a,b]$
ii) f *este derivabilă pe* (a,b)
iii) $f(a) = f(b)$,

atunci există $c \in (a,b)$ *(nu neapărat unic) astfel încât* $f'(c) = 0$.

Interpretare geometrică. Dacă graficul unei funcţii continue pe un interval admite tangentă în fiecare punct interior intervalului şi dacă dreapta care uneşte capetele graficului este paralelă cu axa absciselor, atunci există cel puţin un punct al graficului, diferit de extremităţi, în care tangenta este paralelă cu axa absciselor.

TEOREMA 5.2.3. *(teorema lui* CAUCHY*) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*

i) f, g sunt continue pe $[a, b]$
ii) f, g sunt derivabile pe (a, b)
iii) $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$,

atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există $c \in (a, b)$ (nu neapărat unic) astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

TEOREMA 5.2.4. *(teorema lui* LAGRANGE*) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, şi o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*

i) f este continuă pe $[a, b]$
ii) f este derivabilă pe (a, b),

atunci există un punct $c \in (a, b)$ (nu neapărat unic) astfel încât

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Interpretare geometrică. Teorema lui LAGRANGE spune că dacă graficul unei funcţii continue pe un interval admite tangentă în fiecare punct interior intervalului, atunci există cel puţin un punct al graficului, diferit de capete, în care tangenta este paralelă cu dreapta care uneşte extremităţile graficului.

Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

1) Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci funcţia respectivă este constantă pe acel interval.
2) Dacă două funcţii derivabile pe un acelaşi interval au derivatele egale pe acel interval, atunci diferenţa lor este o constantă.
   Aceste rezultate nu se păstrează pe mulţimi care nu sunt intervale ! De exemplu, funcţia $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0) \\ 2, & x \in (0, 1) \end{cases}$ verifică $f'(x) = 0$, $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ şi totuşi f nu este constantă pe $(-1, 0) \cup (0, 1)$.
   EXEMPLU. Să se demonstreze că

$$\text{arctg}\, x - \text{arctg}\, \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4},\ \forall x \in (-1, \infty).$$

Fie $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg } x$, $g(x) = \text{arctg } \frac{x-1}{x+1}$. Funcţiile f şi g sunt derivabile pe intervalul $(-1, \infty)$ şi $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, iar

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2 + (x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x^2-2x+1)+(x^2+2x+1)} = \frac{1}{x^2+1} = f'(x). \end{aligned}$$

Conform consecinţei 2), rezultă că există o constantă $C \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) - g(x) = C$, $\forall x \in (-1, \infty)$. Pentru a afla C, dăm lui x o valoare particulară convenabilă: $x = 0$. Obţinem

$$C = f(0) - g(0) = \text{arctg } 0 - \text{arctg } (-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},$$

adică $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in (-1, \infty)$. Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

3) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nevid şi $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I.
Atunci:
a) Dacă $f' > 0$ pe I, atunci funcţia f este strict crescătoare pe I.
b) Dacă $f' < 0$ pe I, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe I.
c) $f' \geq 0$ pe I dacă şi numai dacă funcţia f este crescătoare pe I.
d) $f' \leq 0$ pe I dacă şi numai dacă funcţia f este descrescătoare pe I.

Aplicaţii.

i) *Studiul monotoniei funcţiilor şi al punctelor de extrem*: să se studieze monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$.
Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (e polinom) şi

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x+2)(x-2), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se observă că $f'(-2) = f'(2) = 0$ şi $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-2, 2)$, $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Obţinem tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		++	0	- -	0	++	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min		

Aşadar, f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$, strict descrescătoare pe $(-2, 2)$ şi strict crescătoare pe $(2, \infty)$. Prin urmare, punctul $x = -2$ este punct de maxim (local, deoarece $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, deci f ia pe $\mathbb{R}$ şi valori mai mari ca $f(-2) = 16$) şi punctul $x = 2$ este punct de minim (local, deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, deci f ia pe $\mathbb{R}$ şi valori mai mici ca $f(2) = -16$). Funcţia nu are puncte de extrem global.

ii) *Demonstrarea unor inegalităţi*: să se arate că $\ln(1+x^2) \leq x$, $\forall x \geq 0$.

Considerăm funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x^2)$. Constatăm ca a demonstra inegalitatea cerută este echivalent cu a demonstra că $f(x) \geq 0,\ \forall x \geq 0$.
Funcţia f este derivabilă pe $[0,\infty)$ şi

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2},\ \forall x \in [0,\infty).$$

Se observă că $f'(1) = 0$ şi $f'(x) > 0,\ \forall x \in [0,\infty) \setminus \{1\}$ (pătratul unui număr real nenul este strict pozitiv). Obţinem tabelul de variaţie:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$++$	0	$++$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\nearrow$	

Aşadar, f este strict crescătoare pe $[0,1)$ şi pe $(1,+\infty)$. Cum cea mai mică valoare a funcţiei corespunde celui mai mic x, adică este $f(0) = 0$, rezultă că funcţia este pozitivă pe $[0,+\infty)$, ceea ce încheie demonstraţia.

4)

Teorema 5.2.5. *Fie un interval nevid $I \subset \mathbb{R}$, un punct $a \in I'$ şi o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, continuă pe I şi derivabilă pe $I \setminus \{a\}$. Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f are derivată în a şi $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) \in \mathbb{R}$, atunci f este derivabilă în a, iar f' este continuă în a.*

Această teoremă ne permite să calculăm mai uşor derivatele laterale ale unei funcţii într-un punct şi să aflăm dacă funcţia are derivată în acel punct.

Exemplu. Să se studieze derivabilitatea funcţiei:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{2x} - x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ \ln(x+1), & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Soluţie. Verificăm dacă suntem în ipotezele teoremei 5.2.5.
Studiem continuitatea lui f:

- pentru $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) = e^{2x} - x - 1$ şi este continuă (prin operaţii şi compuneri cu funcţii continue);
- pentru $x \in (0,\infty)$, $f(x) = \ln(x+1)$ şi este continuă (prin compuneri de funcţii continue);
- pentru $x = 0$ avem

$$\begin{aligned} f_s(0) &= \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0}(e^{2x} - x - 1) = e^0 - 0 - 1 = 0; \\ f_d(0) &= \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0; \\ f(0) &= \ln(x+1)|_{x=0} = 0, \end{aligned}$$

adică $f_s(0) = f_d(0) = f(0)$, ceea ce demonstrează continuitatea lui f în 0.

Aşadar, f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Studiem derivabilitatea lui f. Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

În plus,

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} (2e^{2x} - 1) = 2e^0 - 1 = 1; \\ f'_d(0) &= \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1 = f'_s(0) \end{aligned}$$

şi atunci există $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1 \in \mathbb{R}$. Din teorema 5.2.5 rezultă că f este derivabilă în 0 şi $f'(0) = 1$.

În concluzie, f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

5.2.3. Regula lui l'Hôspital. Fie un interval nevid $I \subset \mathbb{R}$, un punct $a \in I'$ şi două funcţii $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ astfel încât

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ **sau** $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$

ii) f, g sunt derivabile pe $I \setminus \{a\}$

iii) $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{a\}$

iv) există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

5.3. Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor. Diferenţiale de ordin superior

Definiţia 5.3.1. *Spunem că o funcţie $f : I_{interval\ deschis} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă în punctul $a \in I$ dacă f este derivabilă pe o vecinătate a lui a şi derivata f' este derivabilă în a.*

Notăm $f''(a) = (f')'(a)$ şi o numim derivata a doua (derivata de ordinul II) a lui f în a.

Recurent, derivata de ordinul n a lui f în punctul a este

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a), \text{ pentru } n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

Teorema 5.3.1. *(formula lui* Taylor*) Fie $f : I_{interval\ deschis} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $(n+1)$ ori pe I şi fie un punct $a \in I$. Atunci pentru*

orice $x \in I$ există un c între x şi a astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}_{\textit{restul } \textsc{Lagrange} \textit{ de ordin } n} \end{aligned}$$

În particular, pentru $a = 0$, găsim formula lui MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \text{ unde } \theta \in (0,1). \tag{5.2}$$

Aceste formule sunt folosite pentru aproximarea funcţiilor, pentru aflarea punctelor de extrem sau pentru calculul limitelor de funcţii.

Exemple de aplicare a formulei lui MacLaurin:

a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Funcţia f este derivabilă de oricâte ori pe $\mathbb{R}$ şi $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}, \text{ unde } \theta \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Funcţia f este derivabilă de oricâte ori pe $\mathbb{R}$. Fie, de exemplu, $n = 5$. Calculând primele 6 derivate ale lui f, obţinem:

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 \sin(\theta x), \text{ unde } \theta \in (0,1).$$

c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Funcţia f este derivabilă de oricâte ori pe $\mathbb{R}$. Fie, de exemplu, $n = 5$. Calculând primele 6 derivate ale lui f, obţinem:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \cos(\theta x), \text{ unde } \theta \in (0,1).$$

Definiţia 5.3.2. *Fie o funcţie $f : I_{\text{interval deschis}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă în punctul $a \in I$. Numim diferenţială de ordin 2 a funcţiei f în punctul a, notată $d^2f(a)$, funcţia*

$$d^2f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d^2f(a)(h) = f''(a)h^2$$

$$\underset{h=dx(h)}{\Longleftrightarrow} d^2f(a) = f''(a)(dx)^2 \overset{not.}{=} f''(a)dx^2$$

($d^2f(a)$ este diferenţiala diferenţialei de ordin 1 corespunzătoare aceluiaşi dx).

Recurent,

DEFINIŢIA 5.3.3. *Fie o funcţie* $f : I_{interval\ deschis} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie de* n *ori derivabilă în punctul* $a \in I$. *Numim diferenţială de ordin* n *a funcţiei* f *în punctul* a, *notată* $d^n f(a)$, *funcţia*

$$d^n f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d^n f(a)(h) = f^{(n)}(a)h^n$$

$$\underset{h=dx(h)}{\Longleftrightarrow} d^n f(a) = f^{(n)}(a)(dx)^n \overset{not.}{=} f^{(n)}(a)dx^n$$

($d^n f(a)$ *este diferenţiala diferenţialei de ordin* $(n-1)$ *corespunzătoare aceluiaşi* dx*).*

5.4. Reprezentarea grafică a funcţiilor

Etapele realizării graficului unei funcţii f sunt:

A) **Variaţia funcţiei**
  1) **Domeniul de studiu al funcţiei**
    a) se află domeniul maxim de definiţie D al funcţiei
    b) se studiază paritatea/imparitatea sau periodicitatea funcţiei
      O funcţie f definită pe un domeniu D simetric în jurul originii este:
        ◇ *pară* dacă $f(-x) = f(x),\ \forall x \in D$;
        ◇ *impară* dacă $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D$.
      Pentru o funcţie pară sau impară studiem doar restricţia funcţiei la $D \cap [0, \infty)$, deoarece:
        ◇ dacă f este pară, atunci graficul ei este simetric faţă de axa ordonatelor Oy;
        ◇ dacă f este impară, atunci graficul ei este simetric faţă de originea O.
      O funcţie f este *periodică* dacă există o constantă $T > 0$ astfel încât $f(x+T) = f(x),\ \forall x, x+T \in D$. Cea mai mică constantă T pentru care are loc această relaţie se numeşte perioada principală a funcţiei.
      Dacă f este periodică, de perioadă principală T_{min}, studiem doar restricţia lui f la $D \cap [0, T_{min}]$ (pentru că graficul funcţiei se repetă pe fiecare interval $[kT_{min}, (k+1)T_{min}]$, cu $k \in \mathbb{Z}$). Dacă funcţia este, în plus, pară sau impară , studiem doar restricţia lui f la $D \cap \left[0, \frac{T_{min}}{2}\right]$.
    c) se află intersecţia graficului lui f cu axa yy' ($f(0) = \ldots$);
    d) se află intersecţia graficului lui f cu axa xx' ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ldots$).
  2) **Asimptotele funcţiei**
    a) continuitatea funcţiei şi *asimptotele verticale*
      Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$ un punct de acumulare pentru D.
      Dreapta $x = \alpha$ este asimptotă verticală *la stânga* a lui f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \nearrow \alpha} f(x) = \pm\infty$.

Dreapta $x = \alpha$ este asimptotă verticală *la dreapta* a lui f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \searrow \alpha} f(x) = \pm\infty$.

Se observă că pentru a găsi eventualele asimptote verticale ale lui f trebuie să căutăm punctele de discontinuitate de speţa a doua pentru f.

b) *asimptote orizontale*
Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\underline{l \in \mathbb{R}}$.
Dacă D conţine un interval de forma $(a, +\infty)$, atunci dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a lui f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
Dacă D conţine un interval de forma $(-\infty, a)$, atunci dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ a lui f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Dacă f are asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv, $-\infty$), atunci ***NU*** *are asimptotă oblică spre $+\infty$ (respectiv, $-\infty$).*

În caz că f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$ sau spre $-\infty$, căutăm eventuale:

c) *asimptote oblice*
Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\underline{m \in \mathbb{R}^*}$, $n \in \mathbb{R}$.
Dacă D conţine un interval de forma $(a, +\infty)$, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ a lui f dacă şi numai dacă există $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n. \end{cases}$
Dacă D conţine un interval de forma $(-\infty, a)$, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ a lui f dacă şi numai dacă există $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = n. \end{cases}$

OBSERVAŢIA 5.4.1. *Pentru a pune problema existenţei unor eventuale asimptote orizontale/oblice spre $+\infty$ (respectiv, $-\infty$) ale lui f, trebuie ca domeniul de studiu al funcţiei f să fie* nemărginit *spre $+\infty$ (respectiv, $-\infty$). De exemplu, o funcţie periodică* nu *are niciodată asimptote orizontale sau oblice, pentru că domeniul său de studiu este mărginit.*

3) **Derivata întâi**

a) se calculează f' şi se află domeniul ei maxim de definiţie $D_1 \subset D$;

b) se determină eventualele puncte de întoarcere sau unghiulare
Punctul $a \in D$ este punct de întoarcere al graficului lui f dacă f este continuă în a şi $f'_d(a) = +\infty$, iar $f'_s(a) = -\infty$ (sau invers).
Punctul $a \in D$ este punct unghiular al graficului lui f dacă f este continuă în a şi există ambele derivate laterale ale lui f în

a, cel puţin una dintre ele fiind finită, dar f nu este derivabilă în a (semitangentele la stânga şi la dreapta în a la graficul lui f formează un unghi $\alpha \in (0, \pi)$).

Evident, punctele de întoarcere sau unghiulare ale graficului lui f se caută în $D \setminus D_1$ (mulţimea punctelor în care f este bine definită, dar nu derivabilă).

c) se află zerourile şi semnul lui f', obţinându-se astfel intervalele de monotonie şi punctele de extrem local ale funcţiei f.

Mai precis, ne amintim că:

- ◇ dacă $f' > 0$ pe un interval, atunci f este strict crescătoare pe acel interval;
- ◇ dacă $f' < 0$ pe un interval, atunci f este strict descrescătoare pe acel interval.

4) **Derivata a doua**

a) se calculează f'' şi se află domeniul ei maxim de definiţie $D_2 \subset D_1$;

b) se află zerourile şi semnul lui f'', ceea ce ne va furniza intervalele de convexitate a lui f şi eventualele puncte de inflexiune (= punctele în care f este continuă şi îşi schimbă convexitatea).

Mai precis:

- ◇ dacă $f'' > 0$ pe un interval, atunci f este strict convexă pe acel interval (”ţine apa” $\bigcup$);
- ◇ dacă $f'' < 0$ pe un interval, atunci f este strict concavă pe acel interval (”nu ţine apa” $\bigcap$).

Riguros,

Definiţia 5.4.1. *O funcţie $f : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte:*

i) convexă dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),\ \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1];$$

ii) strict convexă dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),\ \forall x, y \in I,\ x \neq y,\ \forall \lambda \in (0,1);$$

iii) concavă dacă funcţia $-f$ este convexă;

iv) strict concavă dacă funcţia $-f$ este strict convexă.

5) se trec toate informaţiile obţinute mai sus în **tabelul de variaţie**:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

B) **Reprezentarea grafică a funcţiei**

1) se reprezintă asimptotele şi comportarea funcţiei faţă de ele;

2) se reprezintă:

◇ punctele de extrem şi comportarea funcţiei faţă de ele;
◇ punctele de inflexiune;
◇ eventualele puncte unghiulare şi de întoarcere;

3) se reprezintă punctele de intersecţie cu axele.

Se unesc aceste puncte ţinând cont de monotonia şi convexitatea funcţiei.

CAPITOLUL 6

Integrala nedefinită. Integrala Riemann

6.1. Integrala nedefinită

DEFINIŢIA 6.1.1. *Fie o funcţie $f : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că f admite primitive pe I dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I, astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Funcţia F se numeşte primitivă a funcţiei f pe I.*

Observăm că dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci $F + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ este o constantă, este şi ea primitivă a lui f pe I (spunem că primitiva lui f este unică până la o constantă aditivă).

Numim *integrală nedefinită a funcţiei f pe I* mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f pe I; aceasta se notează $\int f(x)dx$.

În anexa A.2 amintim tabelul de integrale nedefinite.

TEOREMA 6.1.1. *Fie $f, g : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii care admit primitive şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f+g$ şi λf admit, de asemenea, primitive pe I şi au loc relaţiile:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

TEOREMA 6.1.2. *(Formula de integrare prin părţi)*

Dacă $f, g : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, cu derivatele continue pe I, atunci funcţiile $f'g$ şi fg' admit primitive pe I şi

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

TEOREMA 6.1.3. *(prima metodă de schimbare de variabilă) Fie I, J intervale reale şi*

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

funcţii cu proprietăţile:

i) φ este derivabilă pe I;

ii) f admite primitive pe J; fie F o primitivă a sa.

Atunci funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive şi $F \circ \varphi$ este o primitivă a sa, adică

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F \circ \varphi + \mathcal{C}.$$

Teorema 6.1.4. *(a doua metodă de schimbare de variabilă) Fie I, J intervale reale şi*

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

funcţii cu proprietăţile:

i) φ este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I;

ii) funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive; fie H o primitivă a sa.

Atunci funcţia f admite primitive şi $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a sa, adică

$$\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

6.2. Integrala Riemann

Teorema 6.2.1. *(Formula lui* Leibniz-Newton*) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă* Riemann *pe $[a, b]$, care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Teorema 6.2.2. *(Formula de integrare prin părţi)*

Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, cu derivatele continue pe $[a, b]$, atunci funcţiile $f'g$ şi fg' sunt integrabile Riemann *pe $[a, b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

CAPITOLUL 7

Integrale improprii

DEFINIŢIA 7.0.1. *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$*, integrabilă* RIEMANN *pe* $[a, c]$*, pentru orice* $c \in [a, b)$*. Spunem că* f *este integrabilă pe* $[a, b)$ *dacă există* $\lim\limits_{c \nearrow a} \int\limits_a^c f(x)dx \in \mathbb{R}$*.*

Notăm $\lim\limits_{c \nearrow b} \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ şi o numim integrală improprie (sau generalizată).

Dacă f este integrabilă pe $[a, b)$, spunem că $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge (şi notăm $\int\limits_a^b f(x)dx$ (C)). În caz contrar (adică dacă $\lim\limits_{c \nearrow b} \int\limits_a^c f(x)dx$ este infinită sau nu există), spunem că $\int\limits_a^b f(x)dx$ diverge (şi notăm $\int\limits_a^b f(x)dx$ (D)).

În mod analog, pentru $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{c \searrow a} \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Clasificarea integralelor improprii:

- de speţa I (de tipul I) - intervalul de integrare este nemărginit: $b = +\infty$ sau $a = -\infty$
  $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int\limits_a^c f(x)dx$, $\quad \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to -\infty} \int\limits_c^b f(x)dx$,
  $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^d f(x)dx + \int\limits_d^\infty f(x)dx$, unde $d \in \mathbb{R}$ (dacă există ambele integrale)
- de speţa a II-a (de tipul II) - intervalul de integrare este mărginit, dar funcţia este nemărginită în vecinătatea unui punct, numit *punct singular*: $\int\limits_a^b f(x)dx$, cu b punct singular sau a punct singular
  Dacă atât a, cât şi b sunt puncte singulare, atunci
  $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx$, unde $d \in (a, b)$ (dacă există ambele integrale)
- de speţa a III-a (mixte) - intervalul de integrare este nemărginit şi funcţia este nemărginită:

- dacă b este punct singular, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{d} f(x)dx + \int\limits_{d}^{b} f(x)dx$, unde $d < b$ (dacă există ambele integrale)

- dacă a este punct singular, $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{d} f(x)dx + \int\limits_{d}^{\infty} f(x)dx$, unde $d > a$ (dacă există ambele integrale)

(pe scurt: dacă apare mai mult de un punct singular, se izolează punctele singulare; se reduc la integrale de speţa I şi a II-a)

7.1. Criterii de convergenţă pentru integrale din funcţii pozitive

Enunţăm aceste rezultate pentru funcţii definite pe $[a, b)$ (b punct singular, care poate fi finit sau $+\infty$); ele se reformulează analog pentru funcţii definite pe $(a, b]$ (a punct singular, care poate fi finit sau $-\infty$).

Teorema 7.1.1. *(Criteriul de comparaţie cu inegalităţi)*
Fie $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$, cu $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$. Au loc:

a) dacă $\int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx$ este convergentă, atunci şi $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ este convergentă;

b) dacă $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ este divergentă, atunci şi $\int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx$ este divergentă.

Teorema 7.1.2. *(Criteriul de comparaţie cu limită)*
Fie $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$, astfel încât să existe $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, \infty]$. Au loc:

a) dacă $l \in (0, \infty)$, atunci integralele $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ şi $\int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx$ au aceeaşi natură;

b) dacă $l = 0$ şi $\int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx$ este convergentă, atunci şi $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ este convergentă;

c) dacă $l = \infty$ şi $\int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx$ este divergentă, atunci şi $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ este divergentă.

Drept integrală de comparaţie se alege, de multe ori,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \begin{array}{l} \nearrow \text{ convergentă pentru } \alpha > 1 \\ \\ \searrow \text{ divergentă pentru } \alpha \leq 1 \end{array} \qquad \text{(pentru integrale de tip I)}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \begin{array}{l} \nearrow \text{ convergentă pentru } \lambda < 1 \\ \\ \searrow \text{ divergentă pentru } \lambda \geq 1 \end{array} \qquad \text{(pentru integrale de tip II)}$$

Obţinem astfel:

Teorema 7.1.3. *(Criteriul în α) (pentru integrale de tipul I)*
Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$.

a) Dacă există $\alpha > 1$ *astfel încât să existe* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < \infty$, *atunci* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *este convergentă.*

b) Dacă există $\alpha \leq 1$ *astfel încât să existe* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0$, *atunci* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *este divergentă.*

Teorema 7.1.4. *(Criteriul în* λ*) (pentru integrale de tipul II)*

A) Fie $f : [a,b) \to [0,\infty)$.

a) Dacă există $\lambda < 1$ *astfel încât să existe* $\lim\limits_{x\nearrow b}(b-x)^\lambda f(x) < \infty$, *atunci* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă.*

b) Dacă există $\lambda \geq 1$ *astfel încât să existe* $\lim\limits_{x\nearrow b}(b-x)^\lambda f(x) > 0$, *atunci* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este divergentă.*

B) Fie $f : (a,b] \to [0,\infty)$.

a) Dacă există $\lambda < 1$ *astfel încât să existe* $\lim\limits_{x\searrow a}(x-a)^\lambda f(x) < \infty$, *atunci* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă.*

b) Dacă există $\lambda \geq 1$ *astfel încât să existe* $\lim\limits_{x\searrow a}(x-a)^\lambda f(x) > 0$, *atunci* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este divergentă.*

7.2. Criterii de convergenţă pentru integrale din funcţii cu semn variabil

Enunţăm aceste rezultate pentru funcţii definite pe $[a,b)$ (b punct singular, care poate fi finit sau $+\infty$); ele se reformulează analog pentru funcţii definite pe $(a,b]$ (a punct singular, care poate fi finit sau $-\infty$).

Teorema 7.2.1. *(Criteriul lui* Dirichlet*)*

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$. *Dacă* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *are integralele parţiale mărginite (adică există o constantă* $M > 0$ *astfel încât* $\left|\int\limits_a^c f(x)\,dx\right| \leq M,\ \forall c \in [a,b)$*), iar* g *este monotonă şi* $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = 0$, *atunci* $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ *este convergentă.*

Teorema 7.2.2. *(Criteriul lui* Abel*)*

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$. *Dacă* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă, iar* g *este monotonă şi mărginită, atunci* $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ *este convergentă.*

CAPITOLUL 8

Serii de funcţii

8.1. Şiruri de funcţii

Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi un şir de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x_0 \in A$, atunci valorile funcţilor f_n în punctul x_0 formează un şir numeric: $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Definiţia 8.1.1. *Fie un şir de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că (f_n) converge punctual (simplu) pe A la funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ (şi notăm $f_n \xrightarrow[A]{p} f$) dacă şirul numeric $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la $f(x)$ pentru fiecare $x \in A$.*

Condiţia ca $f_n \xrightarrow[A]{p} f$ se traduce analitic prin:

Definiţia 8.1.2. *Fie şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că $f_n \xrightarrow[A]{p} f$ dacă $\forall x \in A$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon, x)$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Exemple.

1) Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Cum pentru $x \in [0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ şi pentru $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$, rezultă că $f_n \xrightarrow[[0,1]]{p} f$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

2) Fie $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. De asemenea,
$$0 \leq f_n(x) = \frac{x}{1+nx} < \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}, \ \forall x \in (0,\infty), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
şi, cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in (0,\infty)$ (din criteriul cleşte). Prin urmare, $f_n \xrightarrow[[0,\infty)]{p} 0$.

Ne punem următoarea problemă: dacă $f_n \xrightarrow[A]{p} f$ şi fiecare dintre funcţiile f_n posedă o proprietate $\mathcal{P}$ (de exemplu: mărginire, continuitate, integrabilitate, derivabilitate, etc.), oare funcţia limită f are şi ea proprietatea $\mathcal{P}$? Răspunsul este *nu* (a se vedea exemplul 1: funcţiile f_n sunt continue pentru orice $n \in \mathbb{N}$, în vreme ce funcţia limită f este discontinuă în 1).

Atunci introducem:

DEFINIŢIA 8.1.3. *Fie şirul de funcţii* $f_n : A \to \mathbb{R}$, *cu* $n \in \mathbb{N}^*$. *Spunem că* (f_n) *converge uniform pe* A *la funcţia* $f : A \to \mathbb{R}$ *(şi notăm* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$*) dacă* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\forall n \geq n(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A$.

Facem observaţia că dacă $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, atunci $f_n \xrightarrow[A]{p} f$ (nu şi reciproc - a se vedea EXEMPLUL 1 !)

Reluăm exemplele precedente:

EXEMPLE.

1) Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem prin reducere la absurd că $f_n \xrightarrow[[0,1)]{u} 0$. Luăm $\varepsilon = \frac{1}{2}$ în definiţia 8.1.3 a uniformei convergenţe $\Rightarrow \exists N = n(\frac{1}{2}) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq N : \underbrace{|x^n - 0|}_{x^n} < \frac{1}{2},\ \forall x \in [0,1)$.

   În particular, rezultă că $x^N < \frac{1}{2},\ \forall x \in [0,1)$. Trecând la $\lim\limits_{x \nearrow 1}$, obţinem $1 \leq \frac{1}{2}$, contradicţie. Deci presupunerea făcută este falsă: (f_n) nu converge uniform pe $[0,1)$ la 0.

2) Fie $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Am demonstrat că

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n},\ \forall x \in (0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   În plus, $f_n(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$; prin urmare,

$$0 \leq f_n(x) < \frac{1}{n},\ \forall x \in [0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{8.1}$$

   Scriind definiţia analitică pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, avem că

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall n \geq n(\varepsilon) : \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{8.2}$$

   Combinând relaţiile (8.1) şi(8.2), rezultă că

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \text{ a. î. } \forall n \geq n(\varepsilon) : |f_n(x) - 0| = f_n(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon,\ \forall x \in [0,\infty),$$

   adică $f_n \xrightarrow[[0,\infty)]{u} 0$.

TEOREMA 8.1.1. *(criteriul majorării) Fie* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *şi* $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă există un şir numeric* $(a_n) \subset [0,\infty)$, $a_n \to 0$, *astfel încât* $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in A$, *atunci* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$.

8.2. Convergenţa uniformă a seriilor de funcţii

DEFINIŢIA 8.2.1. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *şi* $f_n : A \to \mathbb{R}$, *cu* $n \in \mathbb{N}^*$, *un şir de funcţii . Spunem că seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este convergentă punctual*

(simplu) pe A dacă şirul sumelor parţiale $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ este convergent punctual pe A. Dacă f este limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, atunci f se va numi suma seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ în sensul convergenţei punctuale şi notăm aceasta prin $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{s}{=} f$.

DEFINIŢIA 8.2.2. *Fie o mulţime $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, un şir de funcţii . Spunem că seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A dacă şirul sumelor parţiale $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ este uniform convergent pe A. Dacă $s_n \underset{A}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$, atunci f se va numi suma seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ în sensul convergenţei uniforme şi notăm aceasta prin $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{=} f$.*

Dacă $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci mulţimea $B \subset A$ a tuturor punctelor în care seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punctual se numeşte *mulţimea de convergenţă a seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

DEFINIŢIA 8.2.3. *Fie şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă pe A dacă seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual pe A.*

8.2.1. Criterii de convergenţă uniformă.

TEOREMA 8.2.1. *(criteriul lui* WEIERSTRASS*) Fie şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ astfel încât $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in A$, atunci seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe A.*

EXEMPLU. Seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$ este uniform şi absolut convergentă pe $\mathbb{R}$, deoarece

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2 + x^2}\right| = \frac{|\sin nx|}{n^2 + x^2} \leq \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

iar seria de numere reale cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (e seria armonică generalizată cu $\alpha = 2$).

Un şir de funcţii $h_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, este uniform mărginit pe mulţimea A dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$|h_n(x)| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A.$$

TEOREMA 8.2.2. *(criteriul lui* DIRICHLET*) Fie $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, două şiruri de funcţii. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ are şirul sumelor parţiale uniform mărginit, şirul numeric $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător pentru orice $x \in A$ şi $g_n \xrightarrow[A]{u} 0$, atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A.*

EXEMPLU. Studiem cu ajutorul criteriului lui DIRICHLET convergenţa seriei de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ pe mulţimea $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Fie $f_n, g_n : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin nx$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ este:

$$s_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\Big(2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x$$

$$+ \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx\Big) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}$$

$$+ \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right).$$

Atunci

$$|s_n(x)| \leq \frac{|\cos\frac{x}{2}| - |\cos\frac{(2n+1)x}{2}|}{2|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2},$$

pentru orice $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, şirul (s_n) este uniform mărginit pe $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

În plus, (g_n) este un şir numeric descrescător la 0, deci îndeplineşte condiţiile teoremei precedente. Prin urmare, seria din exemplu este uniform convergentă (dar nu absolut convergentă !) pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

TEOREMA 8.2.3. *(criteriul lui* ABEL*) Fie $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, două şiruri de funcţii. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A, iar şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform mărginit şi $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton pentru orice $x \in A$, atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A.*

EXEMPLU. Stuidem cu ajutorul criteriului lui ABEL convergenţa seriei de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ pe $[0, 1]$.

Fie $f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$, $g_n(x) = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Observăm că seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă din criteriul lui Leibniz (de la serii de numere reale), deci este şi uniform convergentă ca serie de funcţii.

Pe de altă parte, $|g_n(x)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, ceea ce demonstrează că şirul de funcţii (g_n) este uniform mărginit. De asemenea, pentru orice $x \in [0,1]$, şirul $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton (descrescător pentru $x \in (0,1)$ şi constant pentru $x \in \{0,1\}$).

Conform criteriului lui Abel, seria din exemplu este uniform convergentă pe $[0,1]$ (dar nu şi absolut convergentă).

Observaţia 8.2.1. *Adeseori, în practică, vom avea asigurată condiţia de uniformă convergenţă sau de mărginire uniformă dacă şirul (g_n) este un şir numeric sau seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este o serie numerică, precum în exemplele anterioare.*

Următorul rezultat este un corolar al criteriului lui Dirichlet:

Teorema 8.2.4. *(criteriul lui* Leibniz*) Dacă $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, este un şir descrescător pentru orice $x \in A$ şi $f_n \xrightarrow[A]{u} 0$, atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe A.*

8.2.2. Proprietăţi ale seriilor uniform convergente.

Teorema 8.2.5. *Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, un şir de funcţii astfel încât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă pe A la funcţia f. Dacă f_n sunt funcţii mărginite pe A, atunci şi suma f a seriei este mărginită pe A.*

Teorema 8.2.6. *Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, un şir de funcţii astfel încât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă pe A la funcţia f. Dacă $x_0 \in A'$ şi există $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi*

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \right) \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right).$$

Teorema 8.2.7. *Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, un şir de funcţii astfel încât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă pe A la funcţia f. Dacă f_n sunt funcţii continue într-un punct $x_0 \in A$ (respectiv, pe A), atunci şi suma f a seriei este continuă în x_0 (respectiv, pe A).*

Teorema 8.2.8. *Dacă $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, este un şir de funcţii integrabile* Riemann *pe $[a,b]$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe*

$[a,b]$ la funcţia f, atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ şi

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

TEOREMA 8.2.9. *Dacă $f_n : I \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ este un şir de funcţii derivabile pe intervalul mărginit I, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ este uniform convergentă la g şi există $x_0 \in I$ astfel încât seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ să fie convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă la o funcţie f derivabilă pe I, iar $f' = g$; altfel spus, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

8.3. Serii de puteri

Seriile de puteri reprezintă o extindere naturală a noţiunii de funcţie polinomială.

DEFINIŢIA 8.3.1. *O serie de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots , \tag{8.3}$$

unde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir de numere reale, se numeşte serie de puteri. Numerele a_n, cu $n \in \mathbb{N}$, se numesc coeficienţii acestei serii de puteri.

Observăm că mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri conţine întotdeauna originea; de fapt, se arată că este un interval centrat în origine. Mai precis:

TEOREMA 8.3.1. *Oricare ar fi seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, există $r \in [0, \infty]$ astfel încât seria este absolut convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < r$ şi divergentă pentru orice x cu $|x| > r$.*

Elementul r a cărui existenţă e asigurată de teorema 8.3.1 se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; el este unic determinat pentru fiecare serie de puteri.

Din teorema 8.3.1 rezultă că dacă r este raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci seria este absolut convergentă pe $(-r, r)$ şi divergentă pe $(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$.

Comportarea seriei în $\pm r$ se studiază pentru fiecare serie particulară. Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri poate fi $(-r, r)$, $(-r, r]$, $[-r, r)$ sau $[-r, r]$.

Pentru aflarea razei de convergenţă a unei serii de puteri există formule explicite.

TEOREMA 8.3.2. *Fie un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *şi* $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

i) Dacă $\rho = 0$, *atunci seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge absolut pe* $\mathbb{R}$.

ii) Dacă $\rho = +\infty$, *atunci seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge doar în* $x = 0$.

iii) Dacă $\rho \in (0, \infty)$, *atunci seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este absolut convergentă pentru* $|x| < \frac{1}{\rho}$ *şi divergentă pentru* $|x| > \frac{1}{\rho}$.

iv) Raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este* $r = \frac{1}{\rho} \in [0, \infty]$ *(cu convenţiile* $\frac{1}{0} = +\infty$ *şi* $\frac{1}{\infty} = 0$*).*

COROLAR 8.3.1. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

i) Dacă există $\overline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho$, *atunci raza de convergenţă a seriei este dată de*

$$r = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & \text{dacă } \rho \in (0, \infty) \\ +\infty, & \text{dacă } \rho = 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

ii) Dacă există $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, *atunci raza de convergenţă a seriei este dată tot de formula* (8.4).

8.3.1. Convergenţa uniformă a seriilor de puteri.

TEOREMA 8.3.3. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* r. *Atunci pentru orice* $\rho \in (0, r)$, *seria este uniform convergentă pe* $[-\rho, \rho]$.

Funcţile termen ale unei serii de puteri sunt polinoame, deci sunt derivabile de orice ordin pe $\mathbb{R}$, în particular, continue şi integrabile. Teorema precedentă asigură că aceste proprietăţi se transferă funcţiei sumă cel puţin pe intervalul $(-r, r)$, unde r este raza de convergenţă a seriei.

TEOREMA 8.3.4. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* r. *Atunci suma sa* f *este continuă pe* $(-r, r)$.

Dacă seria este convergentă în punctul r *(respectiv, în punctul* $-r$*), atunci suma sa* f *este continuă în* r *(respectiv, în* $-r$*) (teorema a doua a lui* ABEL*).*

Din teoremele 8.3.3 şi 8.3.4 rezultă că orice serie de puteri este uniform convergentă pe orice interval compact conţinut în mulţimea de convergenţă,

iar suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe întreaga mulţime de convergenţă.

O serie de puteri este uniform convergentă pe întreaga mulţime de convergenţă dacă şi numai dacă mulţimea de convergenţă este $[-r, r]$.

Teorema 8.3.5. *Dacă seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $r > 0$ *şi suma* f *pe* $(-r, r)$*, atunci*

$$\int_0^x f(y)dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \text{ pentru } x \in (-r, r)$$

(adică orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[0, x]$*, cu* $x \in (-r, r)$*).*

Teorema 8.3.6. *Dacă seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $r > 0$ *şi suma* f *pe* $(-r, r)$*, atunci*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots, \quad \forall x \in (-r, r)$$

(adică orice serie de puteri poate fi derivată termen cu termen pe intervalul deschis de convergenţă). Mai mult, $f \in C^{\infty}((-r, r))$*, iar*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n x^{n-k}, \quad \forall x \in (-r, r) \text{ şi}$$

(8.5) $$f^{(k)}(0) = k! a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Observaţia 8.3.1. *Există exemple de serii de puteri care pot fi derivate termen cu termen* numai *pe intervalul deschis de convergenţă.*

Din relaţia (8.5) rezultă că suma f a unei serii de puteri se poate scrie sub forma

(8.6) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \ \forall x \in (-r, r).$$

O serie de puteri de tipul celei din membrul drept al formulei (8.6) poate fi însă asociată oricărei funcţii $f : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $0 \in I$, derivabilă de orice ordin în origine. Ea se numeşte *serie* Taylor *ataşată funcţiei* f *în punctul* 0.

Apar următoarele întrebări:

- există funcţii ale căror serii Taylor au raza de convergenţă mai mare ca 0?
- seria Taylor a lui f poate avea ca sumă chiar pe f pe intervalul său de convergenţă?

Răspunsul la prima întrebare este afirmativ. De exemplu, funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = e^x$$

este de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$; seria sa TAYLOR în 0 este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şi are raza de convergenţă $r = \infty$.

Pentru a răspunde la a doua întrebare, observăm că funcţia

$$f : (-a, a) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x \in (0, a) \\ 0, & \text{dacă } x \in (-a, 0] \end{cases}$$

este de clasă C^∞ pe $(-a, a)$ şi $f^{(n)}(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci seria sa TAYLOR în 0 este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n$ şi are suma 0, deşi funcţia f nu este identic 0 pe $(-a, a)$. Prin urmare, f nu este suma seriei sale TAYLOR în 0.

Enunţăm o condiţie ca seria TAYLOR asociată în origine unei funcţii f să aibă ca sumă pe f, adică f să fie *dezvoltabilă în serie de puteri*:

TEOREMA 8.3.7. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval centrat în origine şi $f \in C^\infty(I)$. Dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,\ \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

atunci suma seriei TAYLOR *ataşată funcţiei f în 0 coincide cu valoarea funcţiei f în punctele $x \in I$.*

O funcţie f de clasă C^∞ pe I care este suma seriei sale TAYLOR în vecinătatea fiecărui punct $x \in I$ se numeşte *funcţie analitică*.

8.4. Serii trigonometrice

Seriile trigonometrice apar frecvent în studiul proceselor oscilatorii. Cu ajutorul lor putem reprezenta funcţii cu mult mai generale decât cele analitice.

Seriile trigonometrice sunt serii de funcţii a căror formă standard este:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{8.7}$$

unde $a_n \in \mathbb{R}$ (cu $n \in \mathbb{N}$) si $b_n \in \mathbb{R}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$) se numesc coeficienţii seriei considerate.

Suma parţială

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

poartă numele de polinomul trigonometric de ordinul n al seriei trigonometrice (8.7).

Şirul de funcţii trigonometrice

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{8.8}$$

se numeşte sistem trigonometric.

OBSERVAŢIA 8.4.1. *1) Dacă seria trigonometrică* (8.7) *converge într-un punct* $x_0 \in \mathbb{R}$*, atunci ea converge în orice punct* $x_0 + 2k\pi$*, unde* $k \in \mathbb{Z}$*.*

2) Dacă seria (8.7) *converge pe intervalul* $[-\pi, \pi]$*, atunci ea converge pe* $\mathbb{R}$ *şi suma sa* $f(x)$ *este o funcţie* 2π*-periodică.*

3) Dacă seria (8.7) *este uniform convergentă pe* $(-\pi, \pi)$*, atunci suma sa* $f(x)$ *este o funcţie* 2π*-periodică şi continuă pe* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$*.*

4) Observaţiile precedente arată că este suficient să studiem convergenţa seriilor trigonometrice pe un interval de lungime 2π *– de exemplu, pe* $[-\pi, \pi]$*.*

TEOREMA 8.4.1. *(proprietatea de ortogonalitate a sistemului trigonometric) Orice doi termeni diferiţi din sistemul trigonometric* (8.8) *sunt ortogonali, adică au loc relaţiile:*

i) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N};$

ii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n;$

iii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n.$

În plus,

iv) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi,\ \forall n \in \mathbb{N}^*;$

v) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi,\ \forall n \in \mathbb{N}^*;$

vi) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 0x\, dx = 2\pi.$

DEMONSTRAŢIE. Integralele de mai sus se calculează uşor cu ajutorul câtorva formule trigonometrice.

i) sin este funcţie impară, cos este pară, deci produsul de sub intergrală este o funcţie impară. Se ştie că integrala RIEMANN dintr-o funcţie impară pe un interval mărginit, centrat în origine este nulă.

ii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(n-m)\pi}{m-n} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(-(m+n)\pi)}{m+n} \right] = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n;$$

iii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(n-m)\pi}{m-n} \right.$$

$$+\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}-\frac{\sin(-(m+n)\pi)}{m+n}\Bigg]=0,\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n;$$

iv) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2nx)dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(x|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{2}\left[\pi-(-\pi)+\frac{\sin 2n\pi}{2n}-\frac{\sin(-2n\pi)}{2n}\right]=\pi,\ \forall n\in\mathbb{N}^*;$$

v) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2nx)dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(x|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{2}\left[\pi-(-\pi)-\frac{\sin 2n\pi}{2n}+\frac{\sin(-2n\pi)}{2n}\right]=\pi,\ \forall n\in\mathbb{N}^*;$$

vi) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 0x\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi.$

Cu ajutorul teoremei 8.4.1 se demonstrează:

TEOREMA 8.4.2. *Dacă seria trigonometrică* (8.7) *este* uniform convergentă *pe* $[-\pi,\pi]$ *şi* $f(x)$ *este suma sa, atunci coeficienţii* a_n, $n\in\mathbb{N}$ *şi* b_n, $n\in\mathbb{N}^*$*, sunt determinaţi de* f *prin* ***formulele*** EULER-FOURIER*:*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{8.9}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

DEMONSTRAŢIE. (indicaţie)
Înmulţim toţi termenii seriei (8.7) cu $\cos mx$, unde $m\in\mathbb{N}$, şi obţinem o serie uniform convergentă pe $[-\pi,\pi]$, cu suma $f(x)\cos mx$:

$$\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx)=f(x)\cos mx.$$

Integrând în această relaţie termen cu termen pe $[-\pi,\pi]$ şi folosind subpunctele *i*), *iii*), *iv*) ale teoremei 8.4.1, rezultă că

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_m\pi,\ \text{pentru } m\in\mathbb{N}^*,$$

de unde se obţine formula lui a_m, pentru $m\in\mathbb{N}^*$. Dacă $m=0$ folosim subpunctele *i*), *iii*), *vi*) ale teoremei 8.4.1 şi obţinem

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 0x\,dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

deci a_0 verifică aceeaşi formulă (8.9).

Analog, înmulţind toţi termenii seriei (8.7) cu $\sin mx$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, integrând termen cu termen pe $[-\pi, \pi]$ şi folosind subpunctele $i)$, $ii)$, $v)$ ale teoremei 8.4.1, rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_m \pi,$$

de unde se obţine formula lui b_m.

8.4.1. Seria Fourier asociată unei funcţii 2π-periodice. Teorema 8.4.2 sugerează ideea de a asocia unei funcţii 2π-periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o serie trigonometrică în care coeficienţii a_n şi b_n să fie daţi de formulele EULER-FOURIER, precum şi problema de a stabili condiţii care să asigure că f este suma acestei serii (cu alte cuvinte, problema *reprezentării funcţiei f printr-o serie trigonometrică*).

Pentru ca integralele din formulele (8.9) să fie convergente, vom adăuga ipoteza ca integrala $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ să fie convergentă (adică $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$). Într-adevăr, în această ipoteză,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) \cos nx| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\cos nx| dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty; \\
\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\sin nx| dx < \infty.
\end{aligned}$$

DEFINIŢIA 8.4.1. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie 2π-periodică, cu*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

1) Prin coeficienţii FOURIER *ai lui f înţelegem numerele*

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \ \forall n \in \mathbb{N}; \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

(am explicat mai sus că aceşti coeficienţi există).

2) Prin seria FOURIER *a funcţiei f înţelegem seria trigonometrică* (8.7)*, ai cărei coeficienţi se iau coeficienţii* FOURIER *ai lui f.*

Faptul că funcţiei f i-am asociat seria sa FOURIER *se notează:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

3) Polinomul trigonometric de ordinul n al seriei FOURIER *asociată funcţiei f se numeşte polinomul* FOURIER *de ordinul n al funcţiei f.*

TEOREMA 8.4.3. *Dacă seria trigonometrică* (8.7) *este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$, atunci ea este seria* FOURIER *asociată sumei sale.*

8.4.2. Seria Fourier asociată unei funcţii pare/impare.

TEOREMA 8.4.4. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie 2π-periodică, cu*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty.$$

1) Dacă f este pară pe $[-\pi, \pi]$, atunci coeficienţii săi FOURIER *sunt:*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \quad b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

iar $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$

2) Dacă f este impară pe $[-\pi, \pi]$, atunci coeficienţii săi FOURIER *sunt:*

$$a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

iar $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$

DEMONSTRAŢIE. (indicaţie) Folosim definiţia coeficienţilor FOURIER şi următoarele rezultate:

- ◇ sin este funcţie impară pe $[-\pi, \pi]$ (chiar pe $\mathbb{R}$), iar cos, funcţie pară
- ◇ produsul a două funcţii pare (respectiv, impare) este funcţie pară; produsul unei funcţii pare cu una impară este funcţie impară
- ◇ integrala RIEMANN a unei funcţii impare pe un interval de forma $[-\alpha, \alpha]$ $(\alpha > 0)$ este 0; integrala RIEMANN a unei funcţii pare pe un interval de forma $[-\alpha, \alpha]$ $(\alpha > 0)$ este dublul valorii acelei integrale pe intervalul $[0, \alpha]$.

OBSERVAŢIA 8.4.2. *Fiecărei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodice, cu $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$ convergentă, îi corespunde o singură serie* FOURIER. *Reciproca nu este, în general, adevărată. Astfel, dacă funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodică, diferă de*

funcţia f de mai sus pe o mulţime finită de puncte din $[-\pi, \pi]$, atunci g şi f, deşi distincte, au aceiaşi coeficienţi FOURIER, *deci aceeaşi serie* FOURIER.

TEOREMA 8.4.5. *(proprietatea de unicitate)*
Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodice, cu

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x)| dx < \infty.$$

Dacă f_1 şi f_2 sunt continue într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, atunci seriile FOURIER *asociate funcţiilor f_1 şi f_2 sunt diferite între ele.*

TEOREMA 8.4.6. *Dacă seria* FOURIER *a unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodică şi continuă pe $\mathbb{R}$, este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$, atunci suma ei este f.*

TEOREMA 8.4.7. *Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este 2π-periodică şi derivabilă pe $[-\pi, \pi]$, cu excepţia unui număr finit de puncte, cu derivata continuă, atunci seria sa* FOURIER *converge în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ la $\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{y \searrow x} f(y) + \lim\limits_{y \nearrow x} f(y)\right]$.*

8.4.3. Forma complexă a seriilor şi coeficienţilor Fourier. În domeniul complex seriile trigonometrice şi coeficienţii FOURIER se scriu într-o formă mai simplă şi mai simetrică:

TEOREMA 8.4.8. *În domeniul complex seria* FOURIER *şi coeficienţii* FOURIER *asociaţi unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodice, cu $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$, se reprezintă prin formulele:*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ unde } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Legătura dintre coeficienţii $c_n \in \mathbb{C}$ şi coeficienţii $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ este:

$$2c_n = \begin{cases} a_n - ib_n, & n \in \mathbb{N}^* \\ a_0, & n = 0 \\ a_{-n} + ib_{-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

În demonstraţie se foloseşte $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8.4.4. Convergenţa în medie pătratică a seriilor Fourier.

TEOREMA 8.4.9. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodică, cu $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$. Dintre toate polinoamele trigonometrice de ordin n,*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \text{ cu } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

polinomul FOURIER *de ordinul* n *asociat lui* f,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(unde a_k*,* $k = \overline{0,n}$ *şi* b_k*,* $k = \overline{1,n}$ *sunt coeficienţii* FOURIER *ai lui* f*) realizează cea mai bună aproximaţie medie pătratică a lui* f*, adică:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx, \textit{ pentru orice } T_n.$$

TEOREMA 8.4.10. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este* 2π*-periodică, cu* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ *convergentă, atunci:*

- *seria* FOURIER *a lui* f *converge în medie pătratică la* f*, adică*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0,$$

  unde S_n *este polinomul* FOURIER *de ordin* n *al lui* f*;*
- $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ *(identitatea lui* PARSEVAL*).*

8.4.5. Seria Fourier asociată unei funcţii $2l$-periodice. În practică întâlnim nu numai funcţii de perioadă 2π, ci şi funcţii de perioadă oarecare $2l$, unde $l > 0$. Pentru funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2l$-periodice, cu $\int\limits_{-l}^{l} |f(x)| dx < \infty$, rezultatele anterioare se transpun cu uşurinţă, făcând substituţia $x \to \frac{\pi x}{l}$.

Obţinem seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

şi coeficienţii FOURIER:

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \ n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \quad b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă f este pară pe $[-l, l]$, atunci

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \quad b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

iar $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$.

Dacă f este impară pe $[-l, l]$, atunci

$$a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \quad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

iar $f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

CAPITOLUL 9

Derivate parţiale şi diferenţiale pentru funcţii de mai multe variabile

9.1. Derivate parţiale

DEFINIŢIA 9.1.1. *Spunem că mulţimea $D \subset \mathbb{R}^k$ este deschisă dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru fiecare punct al său (adică $\forall a \in D$ $\exists r_a > 0$ astfel încât $S(a, r_a) \subset D$).*

Dacă D este mulţime deschisă, atunci $D \cap D' = D$.
În cele ce urmează, considerăm că D este o mulţime deschisă nevidă.

DEFINIŢIA 9.1.2. *Fie funcţia $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi punctul $a \in D$.*

a) Spunem că funcţia f are derivată parţială în punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ în raport cu variabila x_i (unde $i \in \{1, 2, \dots, k\}$) dacă există

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_k) - f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k)}{x_i - a_i};$$

această limită se numeşte derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în punctul a şi se notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $f'_{x_i}(a)$ sau $f_{x_i}(a)$.

b) Spunem că funcţia f este parţial derivabilă în punctul a în raport cu variabila x_i dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

c) Spunem că funcţia f este parţial derivabilă pe D dacă este derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în orice punct din D.

Derivate parţiale de ordin superior

DEFINIŢIA 9.1.3. *Fie funcţia $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, derivabilă parţial pe D şi fie $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, cu $1 \le i \le k$, cele k derivate parţiale ale lui f. Dacă $a \in D$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ şi există $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, atunci aceasta se numeşte derivată parţială de ordin II a funcţiei f în punctul a.*

Mai precis, dacă $i = j$, notăm

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = f''_{x_i x_i}(a) \ (sau\ f_{x_i x_i}(a)),$$

iar dacă $i \neq j$, notăm

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = f''_{x_i x_j}(a) \ (sau\ f_{x_i x_j}(a))$$

şi o numim derivată parţială mixtă de ordin II a funcţiei f în punctul a.

În mod recurent, putem defini derivate parţiale de ordin mai mare. De exemplu, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i}(a) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(a)$ (dacă există).

DEFINIŢIA 9.1.4. *Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Spunem că f este de clasă C^1 pe D (şi notăm $f \in C^1(D)$) dacă f este derivabilă parţial în raport cu toate variabilele pe D şi toate derivatele sale parţiale (de ordinul I) sunt continue pe D.*

DEFINIŢIA 9.1.5. *Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că f este de clasă C^n pe D (şi notăm $f \in C^n(D)$) dacă f este derivabilă parţial de ordin n în raport cu toate variabilele pe D şi toate derivatele sale parţiale de ordin n sunt continue pe D.*

TEOREMA 9.1.1. *(Criteriul lui* SCHWARZ*)*
Fie funcţia $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Dacă f are derivatele parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i \neq j)$ finite într-o vecinătate a unui punct $a \in D$ şi dacă funcţiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt continue în a, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

COROLAR 9.1.1. *Dacă $f \in C^n(D)$, $n \geq 2$ atunci derivatele parţiale mixte ale lui f de ordin mai mic sau egal cu n nu depind de ordinea de derivare.*

9.2. Funcţii diferenţiabile. Diferenţiala unei funcţii

DEFINIŢIA 9.2.1. *Fie o funcţie*

$$f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},\ f = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

şi un punct $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$.
a) Spunem că f este diferenţiabilă în punctul a dacă există

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}{\|x - a\|} = 0.$$

De exemplu, pentru $k = 2$, funcţia $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, este diferenţiabilă în punctul $a = a(a_1, a_2) \in D$ dacă există

$$\lim_{(x,y) \to (a_1,a_2)} \frac{f(x, y) - f(a_1, a_2) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2)\right]}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0.$$

b) În condiţiile de la a), numim diferenţiala funcţiei f în punctul a aplicaţia

$$df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad df(a) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

Mai precis, diferenţiala funcţiei f în punctul a calculată în $h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$ este

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, $df(a)(x-a) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$*, adică limita de la punctul a) se rescrie:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

c) *Spunem că funcţia* f *este diferenţiabilă pe* D *dacă este diferenţiabilă în fiecare punct din* D*.*

Dacă luăm $k = 1$, obţinem definiţia diferenţiabilităţii (echivalentă cu definiţia derivabilităţii) pentru o funcţie reală de o variabilă reală.

Cazuri particulare:

- pentru $\mathbf{k = 2}$: $a = (a_1, a_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$;

$$df(a_1, a_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ df(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)dy;$$

$$df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)h_2 \in \mathbb{R};$$

- pentru $\mathbf{k = 3}$: $a = (a_1, a_2, a_3) \in D \subset \mathbb{R}^3$;

$$df(a_1, a_2, a_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ df(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)dy$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)dz;$$

$$df(a_1, a_2, a_3)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)h_2$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)h_3 \in \mathbb{R}.$$

Dacă există, diferenţiala unei funcţii într-un punct este unică.

TEOREMA 9.2.1. *Dacă* $f \in C^1(D)$*, atunci* f *este diferenţiabilă pe* D*.*

DEFINIŢIA 9.2.2. *Fie funcţia vectorială*

$$F : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, \quad F = (f_1, f_2, \ldots, f_p),$$

unde $f_j : D \to \mathbb{R}$*, pentru* $1 \leq j \leq p$*. Spunem că* F *este diferenţiabilă în punctul* $a \in D$ *dacă toate funcţiile de coordonate* f_j*, cu* $1 \leq j \leq p$*, sunt diferenţiabile în* a*. Diferenţierea se face pe componente:*

$$dF(a)(h) = (df_1(a)(h), df_2(a)(h), \ldots, df_p(a)(h)), \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^k.$$

9.2.1. Reguli de diferenţiere.

$$\begin{aligned} d(F+G)(a) &= dF(a)+dG(a); \\ d(\lambda F)(a) &= \lambda dF(a),\ \forall\lambda\in\mathbb{R} \text{ constantă}; \\ d(FG)(a) &= F(a)dG(a)+G(a)dF(a). \end{aligned}$$

DEFINIŢIA 9.2.3. *Fie* $F : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $F = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in D \subset \mathbb{R}^k$. *Dacă* F *este diferenţiabilă în* $a \in D$, *atunci matricea* $J_F(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le k}} \in \mathcal{M}_{p\times k}(\mathbb{R})$ *se numeşte matricea jacobiană a lui* F *în punctul* a.

Pentru diferenţierea funcţiilor compuse se foloseşte:

TEOREMA 9.2.2. *(Legea lanţului) Fie* $k, p, n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $D \subset \mathbb{R}^k$, $\Delta \subset \mathbb{R}^p$ *două mulţimi deschise. Fie funcţiile* $F : D \to \Delta$, *diferenţiabilă în punctul* $a \in D$ *şi* $G : \Delta \to \mathbb{R}^n$, *diferenţiabilă în punctul* $F(a) \in \Delta$. *Atunci compunerea* $G\circ F : D \to \mathbb{R}^n$ *este diferenţiabilă în* a *şi* $d(G\circ F)(a) = dG(F(a))\circ dF(a)$, *iar* $J_{G\circ F}(a) = J_G(F(a)) \cdot J_F(a)$.

COROLAR 9.2.1. *(cazul* $k = n = 1$, $p = 2$*) Fie* $D \subset \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *doi deschişi; fie funcţiile* $F : D \to \Delta$, $F(t) = (u(t), v(t))$, $\forall t \in D$, F *diferenţiabilă pe* D *şi* $G : \Delta \to \mathbb{R}$, *diferenţiabilă pe* Δ. *Atunci pentru compunerea* $H = G \circ F : D \to \mathbb{R}$ *are loc*

$$H'(t) = \frac{\partial H}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial H}{\partial v}v'(t), \quad \forall t \in D.$$

COROLAR 9.2.2. *(cazul* $k = p = 2$, $n = 1$*) Fie* $D, \Delta \subset \mathbb{R}^2$ *doi deschişi; fie funcţiile* $F : D \to \Delta$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $\forall(x, y) \in D$, F *diferenţiabilă pe* D *şi* $G : \Delta \to \mathbb{R}$, *diferenţiabilă pe* Δ. *Atunci pentru compunerea* $H = G \circ F : D \to \mathbb{R}$ *au loc*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \forall t \in D;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \forall t \in D.$$

9.2.2. Diferenţiale de ordin superior.

Diferenţiale de ordin 2. Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ şi $a \in D$. Atunci diferenţiala de ordin 2 a lui f în a se calculează cu formula:

$$d^2f(a) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i\right)^{(2)}.$$

În particular:

- dacă f este funcţie de două variabile: $f = f(x, y)$, atunci

$$\begin{aligned} d^2 f(a) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy\right)^{(2)} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2, \end{aligned}$$

iar

$$d^2 f(a)(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2, \ \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2;$$

- dacă f este funcţie de trei variabile: $f = f(x, y, z)$, atunci

$$\begin{aligned} d^2 f(a) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a)dz\right)^{(2)} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a)dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)dydz, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} d^2 f(a)(h_1, h_2, h_3) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)h_3^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1 h_2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a)h_1 h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)h_2 h_3, \ \forall (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Diferenţiale de ordin n, $n \geq 2$.

Pentru $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ şi $a \in D$,

$$d^n f(a) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i\right)^{(n)}.$$

În particular,

- dacă $f = f(x, y)$, atunci $d^n f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy\right)^{(n)}$;

- dacă $f = f(x, y, z)$, atunci $d^n f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a)dz\right)^{(n)}$.

Teorema 9.2.3. *(Formula lui* Taylor*) Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k$ de $n+1$ ori diferenţiabilă pe D, un punct $a \in D$ şi o sferă deschisă $S(a, r) \subset D$. Atunci pentru orice $x \in S(a, r)$ există un punct $\xi \in [a, x]$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(a)(x-a) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi)(x-a) \end{aligned}$$

($[a, x] = \{\lambda a + (1-\lambda)x, \ \lambda \in [0, 1]\}$ este segmentul determinat de punctele a şi x).

9.3. Puncte de extrem local. Condiţii suficiente de extrem

Definiţia 9.3.1. *Fie o mulţime* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^k$, *o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi un punct* $a \in A$. *Spunem că:*

a) a este punct de maxim local (maxim relativ) pentru f pe A dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V \cap A$;

b) a este punct de minim local (minim relativ) pentru f pe A dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V \cap A$;

c) a este punct de extrem local (extrem relativ) pentru f pe A dacă este punct de minim sau de maxim local pentru f;

d) a este punct de maxim global (absolut) pentru f pe A dacă $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in A$; *în acest caz* $f(a) \stackrel{not.}{=} \max\limits_{x \in A} f(x)$ *şi se numeşte maximul lui f pe A;*

e) a este punct de minim global (absolut) pentru f pe A dacă $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in A$; *în acest caz* $f(a) \stackrel{not.}{=} \min\limits_{x \in A} f(x)$ *şi se numeşte minimul lui f pe A;*

f) a este punct de extrem global pentru f pe A dacă este punct de minim sau de maxim global pentru f pe A.

Valorile funcţiei f în punctele de extrem local (respectiv, global) din A se numesc extremele locale (respectiv, globale) ale funcţiei pe A.

Observaţia 9.3.1. *1) Un punct de maxim (minim) global pentru o funcţie este şi punct de maxim (respectiv minim) local pentru acea funcţie. Un punct de extrem local nu este însă neapărat punct de extrem global !*

2) Nu este obligatoriu ca o funcţie să aibă puncte de extrem global.

Definiţia 9.3.2. *Dacă* $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *este derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în punctul* $a \in D$ *şi dacă* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ *pentru orice* $1 \leq i \leq k$, *spunem că a este punct critic (staţionar) pentru f.*

Condiţie necesară de extrem: punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile se găsesc printre punctele ei critice.

Condiţii suficiente de extrem

A) **pentru funcţii de două variabile**

Teorema 9.3.1. *Fie* $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, $f \in C^2(D)$ *şi* $a = (x_0, y_0) \in D$ *un punct critic pentru f. Notăm* $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

a) Dacă $B^2 - AC < 0$ *şi* $A < 0$ *(sau* $C < 0$*), atunci* (x_0, y_0) *este punct de maxim local pentru f.*

b) Dacă $B^2 - AC < 0$ *şi* $A > 0$ *(sau* $C > 0$*), atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim local pentru f.*

c) Dacă $B^2 - AC > 0$, (x_0, y_0) *nu este punct de extrem pentru f.*

Dacă $B^2 - AC = 0$, avem un caz de dubiu (trebuie să apelăm la altă metodă pentru a ne pronunţa asupra naturii punctului (x_0, y_0)).

B) **pentru funcţii de** n **variabile,** $n \geq 2$

Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$ un

punct critic pentru f. Construim matricea hessiană a lui f în punctul a, care este o matrice pătratică, simetrică:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_k}(a) \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_3}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a) \end{pmatrix}$$

şi calculăm minorii principali:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_k}(a) \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_3}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a) \end{vmatrix} = \det H_f(a). \end{aligned}$$

a) Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt strict pozitivi $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k > 0)$, atunci a este punct de minim local pentru f.
b) Dacă minorii pricipali ai matricei hessiene alternează ca semn, începând cu primul negativ (adică $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0, \dots$), atunci a este punct de maxim local pentru f.
c) Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt nenuli, dar semnele lor nu se încadrează în cazurile a), b), atunci a nu este punct de extrem local pentru f.

Dacă cel puţin unul dintre Δ_i, $1 \le i \le k$ este nul, avem un caz de dubiu.

CAPITOLUL 10

Integrale curbilinii. Integrale duble. Integrale triple

10.1. Integrale curbilinii

10.1.1. Integrale curbilinii de speţa I. (în raport cu lungimea arcului de curbă)

Fie funcţia f continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ sau $D \subset \mathbb{R}^3$.

a) Dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ conţine arcul de curbă $\gamma : y = \varphi(x),\ x \in [a, b]$, unde $\varphi \in C^1([a, b])$, atunci integrala curbilinie de speţa I a lui f pe γ se calculează cu formula:

$$\int_\gamma f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\, dx.$$

b) dacă arcul de curbă plană γ este dat sub formă parametrică:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ \text{cu } t \in [\alpha, \beta],\ x, y \in C^1([\alpha, \beta]),\ \gamma([\alpha, \beta]) \subset D \subset \mathbb{R}^2,$$

atunci integrala curbilinie de speţa I a lui f pe γ se calculează cu formula:

$$\int_\gamma f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

c) dacă arcul de curbă în spaţiu γ este dat sub formă parametrică:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ \text{cu } t \in [\alpha, \beta],\ x, y, z \in C^1([\alpha, \beta]),\ \gamma([\alpha, \beta]) \subset D \subset \mathbb{R}^3,$$

atunci integrala curbilinie de speţa I a lui f pe γ se calculează cu formula:

$$\int_\gamma f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Lungimea unui arc de curbă γ este $L(\gamma) = \int_\gamma ds$ (în formulele de mai sus se consideră $f \equiv 1$).

10.1.2. Integrale curbilinii de speţa a II-a. (în raport cu axele de coordonate)

a) Dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ conţine arcul de curbă $\gamma : y = \varphi(x),\ x \in [a, b]$, unde $\varphi \in C^1([a, b])$, iar $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe D, atunci integrala curbilinie de speţa a II-a a $1-$formei diferenţiale $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ pe γ se calculează cu formula:

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\right] dx.$$

b) dacă arcul de curbă plană γ este dat sub formă parametrică:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ \text{cu } t \in [\alpha, \beta],\ x, y \in C^1([\alpha, \beta]),\ \gamma([\alpha, \beta]) \subset D \subset \mathbb{R}^2,$$

iar $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe D, atunci integrala curbilinie de speţa a II-a a $1-$formei diferenţiale $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ pe γ se calculează cu formula:

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right] dt.$$

c) dacă arcul de curbă în spaţiu γ este dat sub formă parametrică:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ \text{cu } t \in [\alpha, \beta],\ x, y, z \in C^1([\alpha, \beta]),\ \gamma([\alpha, \beta]) \subset D \subset \mathbb{R}^3,$$

iar $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe D, atunci integrala curbilinie de speţa a II-a a $1-$formei diferenţiale

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

pe γ se calculează cu formula:

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)\right.$$

$$\left. + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)\right] dt.$$

10.2. Integrale duble

Fie $D_{\text{mărginit}} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Dacă domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, adică

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ \forall x \in [a, b]\right\},$$

funcţiile α, β fiind continue pe $[a,b]$, iar $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci integrala dublă a funcţiei f pe domeniul D se calculează cu formula:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b) Dacă domeniul D este simplu în raport cu axa Ox, adică

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \delta(y) \leq x \leq \lambda(y),\ \forall y \in [c,d] \right\},$$

funcţiile δ, λ fiind continue pe $[c,d]$, iar $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci integrala dublă a funcţiei f pe domeniul D se calculează cu formula:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\delta(x)}^{\lambda(x)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

c) Dacă transformarea

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

satisface condiţiile:
1) $\varphi, \psi \in C^1(D')$ (funcţiile φ, ψ sunt derivabile parţial în toate variabilele, cu derivate parţiale continue);
2) funcţiile φ, ψ stabilesc o corespondenţă biunivocă (adică sunt bijective, deci inversabile) şi bicontinuă (adică φ şi inversa ei φ^{-1}, ψ şi inversa ei ψ^{-1} sunt continue) între mulţimea punctelor domeniului D din planul xOy şi mulţimea punctelor domeniului D' din planul $uO'v$;
3) jacobianul $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ păstrează semn constant în D,

atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J|\,dudv.$$

Aria unei sprafeţe plane mărginite $D \subset \mathbb{R}^2$ este

$$A(D) = \iiint\limits_D dxdy.$$

10.3. Integrale triple

Fie $V_{\text{mărginit}} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Dacă domeniul V este cuprins între planul $z = c$ şi planul $z = d$ şi secţiunea cu planul $z = z_0$, $z_0 \in [c,d]$ se proiectează în planul xOy după

domeniul D_{z_0}, iar $f : V \to \mathbb{R}$ este continuă pe V, atunci integrala triplă a funcţiei f extinsă la domeniul V se calculează cu formula:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \int_c^d \left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz.$$

b) Dacă domeniul V este limitat de o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz (şi a cărei intersecţie cu planul xOy închide domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$), de suprafaţă interioară $z = \varphi_1(x,y)$, cu $(x,y) \in D$ şi de suprafaţă exterioară $z = \varphi_2(x,y)$, cu $(x,y) \in D$, iar funcţia $f : V \to \mathbb{R}$ este continuă pe V, atunci integrala triplă a funcţiei f extinsă la domeniul V se calculează cu formula:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

c) Dacă transformarea

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \lambda(u,v,w) \end{cases}$$

satisface condiţiile:

1) $\varphi, \psi, \lambda \in C^1(V')$ (funcţiile φ, ψ, λ sunt derivabile parţial în toate variabilele, cu derivate parţiale continue);

2) funcţiile φ, ψ, λ stabilesc o corespondenţă biunivocă (adică φ, ψ, λ sunt bijective, deci inversabile) şi bicontinuă (adică φ şi inversa ei φ^{-1}, ψ şi inversa ei ψ^{-1}, λ şi inversa ei λ^{-1} sunt continue) între mulţimea punctelor domeniului V din spaţiul $Oxyz$ şi mulţimea punctelor domeniului V' din spaţiul $O'uvw$;

3) jacobianul $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ are semn constant în V,

atunci

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \lambda(u,v,w))|J|\,dv'.$$

Volumul unui corp mărginit $V \subset \mathbb{R}^3$ este

$$vol(V) = \iiint\limits_V dv.$$

ANEXA A

Derivate şi integrale pentru funcţii de o variabilă

A.1. Derivate pentru funcţii de o singură variabilă

TABELA 1. Tabelul de derivare al funcţiilor elementare

	$f(x)$	$f'(x)$	Domeniul de derivabilitate
1.	$c,\ c \in \mathbb{R}$ constantă	0	$\mathbb{R}$
2.	$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
3.	$x^a,$ cu $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	cel puţin $(0, \infty)$
4.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
5.	$a^x,$ cu $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
6.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
7.	$\log_a x$, cu $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$
8.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
9.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

	$f(x)$	$f'(x)$	Domeniul de derivabilitate
10.	$\text{tg}\, x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
11.	$\text{ctg}\, x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
12.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
13.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
14.	$\text{arctg}\, x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$
15.	$\text{arcctg}\, x$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$

Reguli de derivare:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(f-g)' = f' - g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (g \neq 0)$;
- în particular, dacă c este o constantă, $(f+c)' = f'$ şi $(cf)' = cf'$;
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$;
- $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (dacă f bijectivă pe intervalul I şi $f' \neq 0$ pe I)
- $(f^g)' = \left(e^{\ln f^g}\right)' = \left(e^{g \ln f}\right)' = e^{g \ln f} \cdot (g \ln f)' = f^g \cdot \left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$ $= \left(g f^{g-1}\right) f' + \left(f^g \ln f\right) g'$;
- regula lui Leibniz de derivare a produsului a două funcţii: dacă $m \in \mathbb{N}^*$ şi f, g sunt derivabile de m ori, atunci produsul fg este

derivabil de m ori şi

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k)} g^{(m-k)}.$$

A.2. Tabelul de integrale nedefinite

Peste tot în cele ce urmează J reprezintă un interval real.

	Funcţia	$\int \mathbf{f(x)dx}$
1.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$
2.	$f : J \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^a, \ \text{cu } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}$
3.	$f : J \subseteq \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + \mathcal{C}$
4.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$	$e^x + \mathcal{C}$
5.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a^x, \ \text{cu } a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$
6.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-a, a\} \to \mathbb{R}, \ \text{unde } a \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + \mathcal{C}$
7.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}, \ \text{unde } a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} \text{arctg } \dfrac{x}{a} + \mathcal{C}$

	Funcţia	$\int \mathbf{f(x)dx}$
8.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
9.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$	$\sin x + \mathcal{C}$
10.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x + \mathcal{C}$
11.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{ctg } x + \mathcal{C}$
12.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \text{tg } x$	$-\ln \|\cos x\| + \mathcal{C}$
13.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \text{ctg } x$	$\ln \|\sin x\| + \mathcal{C}$
14.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, cu $a \in \mathbb{R}^*$	$\ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}$
15.	$f : J \to \mathbb{R}$, cu $J \subseteq (-\infty, -a)$ sau $J \subseteq (a, \infty)$, unde $a > 0$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln \left\| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\| + \mathcal{C}$

	Funcţia	$\int \mathbf{f(x)dx}$
16.	$f: J \subseteq (-a, a) \to \mathbb{R}$, cu $a > 0$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a} + \mathcal{C}$

A.3. Formule trigonometrice

- $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\text{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin(-x) = -\sin x, \ \cos(-x) = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y + \sin y \sin x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos x - \cos y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{y-x}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

- $\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bibliografie

[1] M. Apetrii. *Curs de calcul integral*, anul II, Facultatea de Matematică.

[2] N. Apreutesei-Dimitriu, G. Apreutesei. *Introducere în teoria integrabilităţii*. Editura Performantica , Iaşi, 2005.

[3] A. Croitoru, M. Durea, C. Văideanu. *Probleme de analiză matematică. I - Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}$. Editura PIM , Iaşi, 2010.

[4] G.M. Fihtenholţ. *Curs de calcul diferenţial şi integral*. Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

[5] A. Gavriluţ. *Curs de analiză matematică*, anul I, Facultatea de Chimie.

[6] A. Gavriluţ. *Curs de calcul diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile reale*, anul I, Facultatea de Matematică.

[7] A.M. Precupanu. *Bazele analizei matematice*. Editura Polirom, Iaşi, 1998.

[8] Gh. Sireţchi. *Calcul diferenţial şi integral* (2 vol.). Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[9] ***. Manualele de matematică, clasele a XI-a şi a XII-a.